

Devoir sur table n°5

Mercredi 15 janvier 2025 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice **de type Collège** est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Questions de cours (5 points)

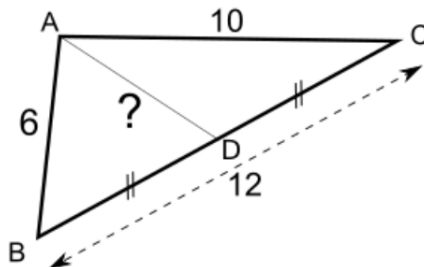
Pour les questions 1 et 2, on suppose le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère le cercle $\mathcal{C}$ dont une équation cartésienne est $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$
 - (a) Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}$.
 - (b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.
 - (c) On note $A(1; 2)$. Déterminer une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ en A .
 - (d) Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 10 - \frac{3}{2}x$ est perpendiculaire à $\mathcal{T}$.
 - (e) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}$.
2. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.
L'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

avec a, b et c des réels et $c < 0$ est toujours un cercle.

3. On considère la figure ci-dessous, où D est le milieu du segment $[BC]$. On donne $AB = 6$ cm, $AC = 10$ cm et $BC = 12$ cm. Déterminer la longueur AD .



Solution:

1. (a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0 &\iff x^2 - 6x + y^2 + 2y - 3 = 0 \\
 &\iff (x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 - 3 = 0 \\
 &\iff (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 13
 \end{aligned}$$

Ainsi; une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 13$. Donc le centre de $\mathcal{C}$ est le point $I(3; -1)$ et le rayon de $\mathcal{C}$ est $\sqrt{13}$.

- (b)
- $\mathcal{C}$
- coupe l'axe des ordonnées en deux points de coordonnées
- $(0; 1)$
- et
- $(0; -3)$
- .

- (c)
- $(\mathcal{T}) : 2x - 3y + 4 = 0$

- (d) Une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ est $3x + 2y - 20 = 0$. Donc un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$ est $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. De même, un vecteur normal à la droite $\mathcal{T}$ est $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. De plus, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3 \times 2 + 2 \times -3 = 0$ Donc $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux, et les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ sont perpendiculaires.

- (e) On résout le système $\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ y = 10 - \frac{3}{2}x \end{cases}$
- $$\begin{aligned}
 \begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ y = 10 - \frac{3}{2}x \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x - 3\left(10 - \frac{3}{2}x\right) + 4 = 0 \\ y = 10 - \frac{3}{2}x \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2x - 30 + \frac{9}{2}x + 4 = 0 \\ y = 10 - \frac{3}{2}x \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \frac{13}{2}x = 26 \\ y = 10 - \frac{3}{2}x \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 10 - \frac{3}{2} \times 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc le point $E(4; 4)$ est le point d'intersection des deux droites.

2. On peut factoriser l'expression :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 &\iff \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + c = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - c \end{aligned}$$

Or, $c < 0$, donc $-c > 0$ et donc $\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - c > 0$. Ainsi on obtient bien une équation de cercle.

3. Dans le triangle ABC , d'après le (premier) théorème de la médiane,

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

c'est-à-dire

$$AD^2 = \frac{1}{2} \left(AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 \right)$$

c'est-à-dire

$$AD^2 = \frac{1}{2} \left(36 + 100 - \frac{1}{2} \times 144 \right)$$

c'est-à-dire

$$AD^2 = 32$$

Or, AD est une longueur, donc AD est positif. D'où $AD = \sqrt{32}$ cm.

Exercice 2 : Des limites (4,5 points)

1. On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{3x+4}{x^3-8}$. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f puis les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 2 \cos x} + 5$. Déterminer les limites de g en $+\infty$.
3. On considère la fonction u définie par $u(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x^2}$. Déterminer la limite de u en $+\infty$.

Solution:

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+4}{x^3-8} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+4}{x^3-8} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+4}{x^3-8} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+4}{x^3-8} = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2 \cos x} + 5 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2 \cos x} + 5 = 5$$

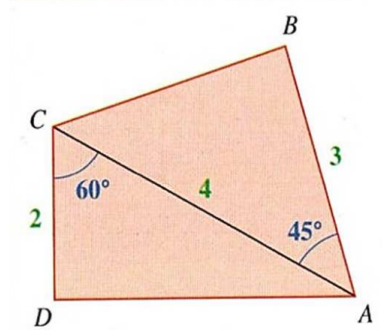
3. Pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x^2} &= \frac{\left(\sqrt{x+1} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)\right) \left(\sqrt{x+1} + \left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)}{x^2 \left(\sqrt{x+1} + \left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{x+1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2}{x^2 \left(\sqrt{x+1} + \left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{x+1 - 1 - \frac{x^2}{4} - x}{x^2 \left(\sqrt{x+1} + \left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{-1}{4 \left(\sqrt{x+1} + \left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{4 \left(\sqrt{x+1} + \left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)} = 0$$

Exercice 3 : Relations métriques dans le triangle (4 points)

On considère la représentation graphique ci-dessous, dans laquelle on suppose que $AC = 4$ cm, $AB = 3$ cm, $CD = 2$ cm, $\widehat{BAC} = 45^\circ$ et $\widehat{ACD} = 60^\circ$.



1. Le triangle ACD est-il rectangle ?
2. Quelle est l'aire exacte du quadrilatère $ABCD$?

Solution:

1. Déterminons la longueur AD : dans le triangle ACD , d'après le théorème d'Al-Kashi

$$AD^2 = CD^2 + CA^2 - 2 \times CD \times CA \times \cos(\widehat{ACD})$$

c'est-à-dire

$$AD^2 = 16 + 4 - 2 \times 4 \times 2 \times \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire

$$AD^2 = 20 - 8$$

c'est-à-dire

$$AD^2 = 12$$

Donc $AD = \sqrt{12}$ cm.

Puis, on constate que :

$$\bullet \quad CD^2 + DA^2 = 2^2 + \sqrt{12}^2 = 16 \qquad \bullet \quad AC^2 = 16.$$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ACD est un triangle rectangle en D .

2. L'aire du quadrilatère $ABCD$, notée $\mathcal{A}$, est la somme de l'aire du triangle ACD et de l'aire du triangle ABC .

- ADC est un triangle rectangle en D , donc $\mathcal{A}_{ADC} = \frac{AD \times DS}{2} = \frac{\sqrt{12} \times 2}{2} = \sqrt{12} \text{ cm}^2$.
- Dans le triangle ABC , d'après la loi des sinus :

$$\frac{AB \times BC \times AC}{2S} = \frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})}$$

$$\frac{3 \times BC \times 4}{2S} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{6BC}{S} = \frac{2BC}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{3}{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S = 3\sqrt{2}$$

Ainsi

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ADC} + S = \sqrt{12} + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$$

Ainsi l'aire du quadrilatère $ABCD$ est $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

Exercice 4 : Relations métriques dans le triangle (1,5 points)

ABC est un triangle tel que $AB = 10$, $BC = 6$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.
Calculer la valeur exacte de AC .

Solution: On utilise la formule d'Al-Kashi. $b = AC$ est solution de l'équation

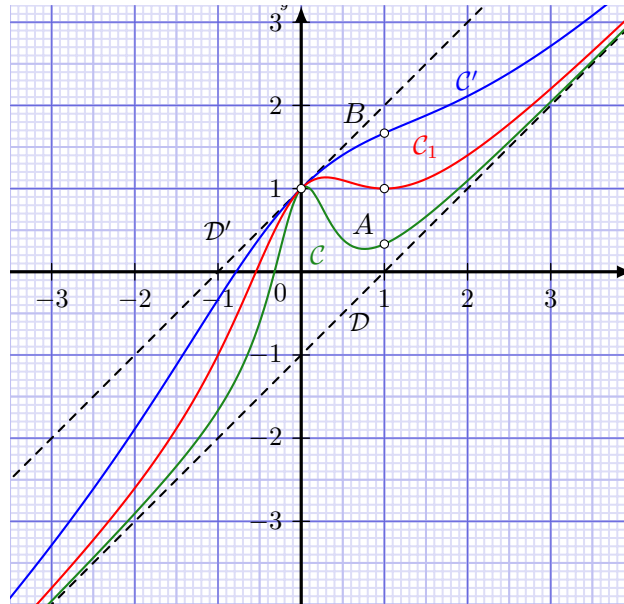
$$b^2 + a^2 - 2ba \cos \widehat{ACB} = c^2 \iff b^2 + 36 - 2b \times 6 \times \cos \frac{1}{2} = 100 \iff b^2 - 6b - 64 = 0$$

Il y a deux racines $b = 3 \pm \sqrt{73}$. Or, $b \geq 0$ d'où $b = 3 + \sqrt{73}$

Exercice 5 : Fonction à paramètre (5 points)

Soit la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x + \frac{1 - kx^2}{1 + kx^2}$ où k est un réel positif ou nul.

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous, on a représenté les droites $\mathcal{D}$ d'équation $x - y - 1 = 0$ et $\mathcal{D}'$ d'équation $x - y + 1 = 0$, la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ de f_1 et deux autres courbes représentatives de $f_k : \mathcal{C}$ passant par $A\left(1; \frac{1}{3}\right)$ et $\mathcal{C}'$ par $B\left(1; \frac{5}{3}\right)$.



- Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$. Justifier soigneusement.
- Justifier que, pour tout réel $k \geq 0$, la droite $\mathcal{D}'$ est tangente à la courbe représentative de f_k .
- (a) Justifier que, pour tout x réel, on a

$$f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + kx^2} \text{ et } f_k(x) = x + 1 - \frac{2kx^2}{1 + kx^2}$$

- En déduire, pour tout k strictement positif :
 - la position relative de la courbe $\mathcal{C}_k$ par rapport aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
 - Les asymptotes de la courbe $\mathcal{C}_k$
- Dans cette question, on considère que x est fixé. On fait tendre k vers $+\infty$. Déterminer la limite de $f_k(x)$ quand k tend vers $+\infty$. On appelle cette limite $L(x)$.

5. (Bonus) Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto L(x)$ sur l'intervalle $[-3; 3]$.

Solution: Soit k un réel positif ou nul.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = -\infty$
2. Une équation de la droite tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 0 est $f'_k(0)(x - 0) + f(0)$. Déterminons $f'_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'_k(x) &= 1 + \frac{2k(1 + kx^2) - (1 - kx^2) \times 2k}{(1 + kx^2)^2} \\ &= 1 + \frac{1 + 2k + 2k^2x^2 - 2k - 2k^2x^2}{(1 + kx^2)^2} \\ &= 1 + \frac{1}{(1 + kx^2)^2} \end{aligned}$$

Ainsi $f'(0) = 1$. De plus, $f(0) = 1$. Ainsi, l'équation réduite de la droite tangente à la courbe $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$, c'est-à-dire $x - y + 1 = 0$. Donc la droite $\mathcal{C}_k$ est bien tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de f_k quel que soit $k \in \mathbb{R}_+$.

3. (a) On développe les expressions proposées :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, x - 1 + \frac{2}{1 + kx^2} &= x + \frac{-1 - kx^2 + 2}{1 + kx^2} \\ &= x + \frac{1 - kx^2}{1 + kx^2} \\ &= f_k(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, x + 1 - \frac{2kx^2}{1 + kx^2} &= x + \frac{1 + kx^2 - 2kx^2}{1 + kx^2} \\ &= x + \frac{1 - kx^2}{1 + kx^2} \\ &= f_k(x) \end{aligned}$$

- (b) Les équations réduites des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont respectivement $y = x - 1$ et $y = x + 1$. Ainsi, d'après les relations précédentes, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f_k(x) - (x - 1) = \frac{2}{1 + kx^2} \text{ et } f_k(x) - (x + 1) = \frac{2}{1 + kx^2} = -\frac{2kx^2}{1 + kx^2}$$

- i. Puisque $k \geq 0$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, on a $\frac{2}{1 + kx^2} \geq 0$

et $-\frac{2kx^2}{1 + kx^2} \leq 0$. On en déduit que $f_k(x) - (x - 1) \geq 0$ et que $f_k(x) - (x + 1) \leq 0$. Ainsi, quel que soit $k \in \mathbb{R}$, la courbe $\mathcal{C}_k$ est au-dessus de la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}_k$ est en dessous de la droite $\mathcal{D}'$.

- ii. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) - (x - 1) = 0$, donc la droite $\mathcal{D}$ est asymptote (oblique) à la courbe $\mathcal{C}_k$ en $+\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) - (x - 1) = 0$, donc la droite $\mathcal{D}$ est aussi asymptote (oblique) à la courbe en $-\infty$.

4. Si k tend vers $+\infty$, on a une forme indéterminée. Factorisons :

$$f_k(x) = x + \frac{k \left(\frac{1}{k} - x^2 \right)}{k \left(\frac{1}{k} + x^2 \right)} = x + \frac{\frac{1}{k} - x^2}{\frac{1}{k} + x^2}$$

Si k tend vers $+\infty$, alors $\frac{1}{k}$ converge vers 0. Donc la fonction f_k va se rapprocher de la fonction f définie par $f(x) = x + \frac{-x^2}{x^2}$, c'est-à-dire $f(x) = x - 1$, donc la courbe représentative est la droite $\mathcal{D}$.

Bonus :

Hors barème

Pour tout réel m , on note f_m la fonction définie par

$$f_m(x) = \frac{mx - 2}{(m + 2)x + 3}$$

Trouver l'ensemble des réels m pour lesquels la courbe représentative de la fonction f_m (dans un repère orthonormé) admet au point d'abscisse -1 une tangente perpendiculaire à la droite d'équation

$$y = \frac{3}{2}x + 5$$