

Devoir sur table n°5

Mercredi 15 janvier 2025 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice **de type Collège** est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Questions de cours (5 points)

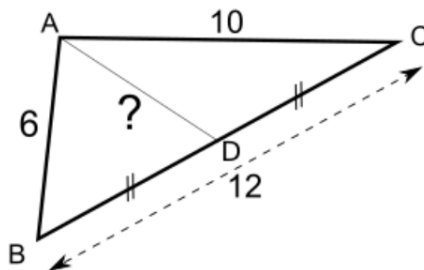
Pour les questions 1 et 2, on suppose le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère le cercle $\mathcal{C}$ dont une équation cartésienne est $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$
 - (a) Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}$.
 - (b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.
 - (c) On note $A(1; 2)$. Déterminer une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ en A .
 - (d) Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 10 - \frac{3}{2}x$ est perpendiculaire à $\mathcal{T}$.
 - (e) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}$.
2. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.
L'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

avec a, b et c des réels et $c < 0$ est toujours un cercle.

3. On considère la figure ci-dessous, où D est le milieu du segment $[BC]$. On donne $AB = 6$ cm, $AC = 10$ cm et $BC = 12$ cm. Déterminer la longueur AD .

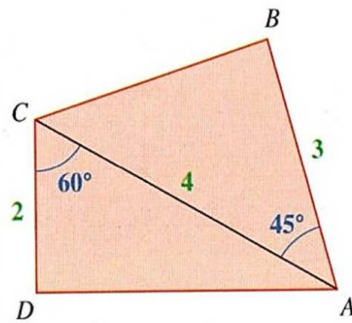


Exercice 2 : Des limites (4,5 points)

1. On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{3x+4}{x^3-8}$. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f puis les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 2 \cos x} + 5$. Déterminer les limites de g en $+\infty$.
3. On considère la fonction u définie par $u(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x^2}$. Déterminer la limite de u en $+\infty$.

Exercice 3 : Relations métriques dans le triangle (4 points)

On considère la représentation graphique ci-dessous, dans laquelle on suppose que $AC = 4$ cm, $AB = 3$ cm, $CD = 2$ cm, $\widehat{BAC} = 45^\circ$ et $\widehat{ACD} = 60^\circ$.



1. Le triangle ACD est-il rectangle ?
2. Quelle est l'aire exacte du quadrilatère $ABCD$?

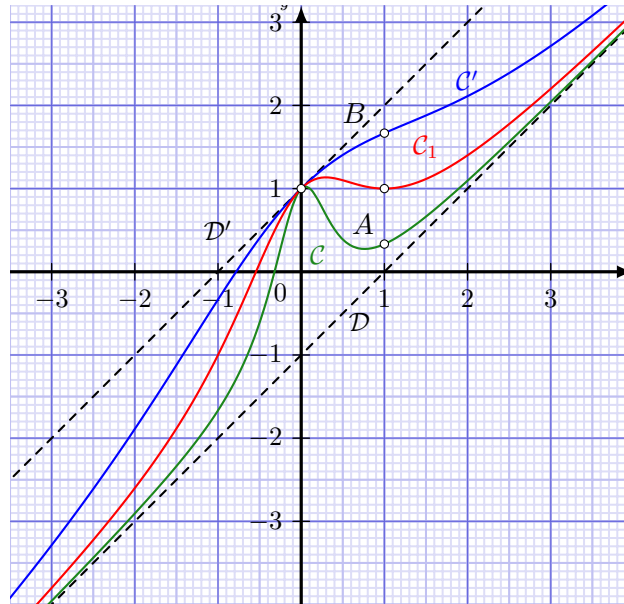
Exercice 4 : Relations métriques dans le triangle (1,5 points)

ABC est un triangle tel que $AB = 10$, $BC = 6$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$ rad. Calculer la valeur exacte de AC .

Exercice 5 : Fonction à paramètre (5 points)

Soit la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x + \frac{1 - kx^2}{1 + kx^2}$ où k est un réel positif ou nul.

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous, on a représenté les droites $\mathcal{D}$ d'équation $x - y - 1 = 0$ et $\mathcal{D}'$ d'équation $x - y + 1 = 0$, la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ de f_1 et deux autres courbes représentatives de $f_k : \mathcal{C}$ passant par $A\left(1; \frac{1}{3}\right)$ et $\mathcal{C}'$ par $B\left(1; \frac{5}{3}\right)$.



- Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$. Justifier soigneusement.
- Justifier que, pour tout réel $k \geq 0$, la droite $\mathcal{D}'$ est tangente à la courbe représentative de f_k .
- (a) Justifier que, pour tout x réel, on a

$$f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + kx^2} \text{ et } f_k(x) = x + 1 - \frac{2kx^2}{1 + kx^2}$$

- En déduire, pour tout k strictement positif :
 - la position relative de la courbe $\mathcal{C}_k$ par rapport aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
 - Les asymptotes de la courbe $\mathcal{C}_k$
- Dans cette question, on considère que x est fixé. On fait tendre k vers $+\infty$. Déterminer la limite de $f_k(x)$ quand k tend vers $+\infty$. On appelle cette limite $L(x)$.

5. (Bonus) Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto L(x)$ sur l'intervalle $[-3; 3]$.

Bonus :

Hors barême

Pour tout réel m , on note f_m la fonction définie par

$$f_m(x) = \frac{mx - 2}{(m + 2)x + 3}$$

Trouver l'ensemble des réels m pour lesquels la courbe représentative de la fonction f_m (dans un repère orthonormé) admet au point d'abscisse -1 une tangente perpendiculaire à la droite d'équation

$$y = \frac{3}{2}x + 5$$