

Devoir sur table n°4

Mercredi 11 décembre 2024 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice n° 1 :

On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \text{ et } v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique, dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n)$
4. Exprimer la somme suivante en fonction de n : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

Solution:

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} w_n &= u_n + v_n \\ w_n &= \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} + \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2} \\ w_n &= 3 \times 2^n \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression du terme général de la suite géométrique de premier terme $w_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} t_n &= u_n - v_n \\ t_n &= \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} - \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2} \\ t_n &= \frac{2 \times (-4n + 3)}{2} \\ t_n &= -4n + 3. \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression du terme général de la suite arithmétique de premier terme $t_0 = 3$ et de raison $r = -4$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de (w_n) et (t_n) , on sait que :

$$w_n = u_n + v_n$$

$$t_n = u_n - v_n.$$

D'où, en ajoutant membre à membre les deux égalités

$$u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n)$$

4. On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$$

$$T_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_n$$

W_n est la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique (w_n) , dont la raison est différente de 1, d'où l'égalité :

$$W_n = w_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 3 \times (2^{n+1} - 1)$$

T_n est la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite arithmétique (t_n) :

$$T_n = (n + 1) \times \frac{t_0 + t_n}{2} = (n + 1) \times \frac{3 - 4n + 3}{2} = (n + 1)(3 - 2n)$$

d'où

$$T_n = -2n^2 + n + 3$$

Finalement, on en déduit que

$$S_n = \frac{1}{2}W_n + \frac{1}{2}T_n = 3 \times 2^n - \frac{3}{2} - n^2 + \frac{n}{2} + \frac{3}{2} = \boxed{3 \times 2^n - n^2 + \frac{n}{2}}$$

Exercice n° 2 :

Au premier janvier 2018, une association comptait 2 500 adhérents. Une étude a permis de modéliser l'évolution future du nombre d'adhérents de l'association. Chaque mois :

- 4 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 80 nouvelles personnes adhèrent à l'association.

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une estimation du nombre d'adhérents de l'association n mois après le 1^{er} janvier 2018.

1. Justifier que la suite (u_n) définie par $u_0 = 2\,500$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,96u_n + 80$ modélise l'évolution mensuelle du nombre d'adhérents de l'association.

2. Cette suite (u_n) est-elle arithmétique ? Justifier.
3. Cette suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifier.
4. Exprimer u_n en fonction de n (on introduira une suite auxiliaire bien choisie grâce à une propriété de cours...)
5. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
6. Le montant de la cotisation mensuelle à l'association est de 10 euros. Calculer la somme totale, arrondie à la centaine d'euros près, que l'association espère obtenir pour l'année 2018.

Solution:

1. Au premier janvier 2018, l'association comptait 2500 adhérents donc $u_0 = 2500$.
Le coefficient multiplicateur associé à une diminution de 4 % est $1 - \frac{4}{100} = 0,96$.
L'évolution mensuelle du nombre d'adhérents de l'association s'obtient à l'aide du calcul suivant :

$$u_n \xrightarrow{\times 0,96 \text{ (perte de 4\% des adhérents)}} 0,96u_n \xrightarrow{+80 \text{ (nouvelles adhésions)}} \underbrace{0,96u_n + 80}_{u_{n+1}}$$

Ainsi, la suite (u_n) définie par $u_0 = 2500$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 0,96u_n + 80$$

modélise l'évolution mensuelle du nombre d'adhérents de l'association.

2. On calcule u_1 et u_2 :

- $u_0 = 2500$
- $u_1 = 0,96 \times 2500 + 80 = 2480$
- $u_2 = 0,96 \times 2480 + 80 = 2460,8$

Puis, $u_1 - u_0 = -20$ et $u_2 - u_1 = -19,2$. Ainsi $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.

donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

3. De même, $\frac{u_1}{u_0} = \frac{124}{125}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{769}{775}$. Ainsi $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$

Donc la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

4. On calcule $\lambda = \frac{-80}{1 - 0,96} = -2000$.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 2000$.

Démontrons que (v_n) est une suite géométrique et précisons son premier terme et sa raison. Pour tout entier n positif,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2000 \\ &= 0,96u_n + 80 - 2000 \\ &= 0,96u_n - 1920 \\ &= 0,96(u_n - 2000) \\ &= 0,96v_n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,96v_n$ donc (v_n) est la suite géométrique de raison $0,96$ dont le premier terme $v_0 = 2500 - 2000 = 500$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $v_n = 500 \times 0,96^n$

Comme pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 2000 \Leftrightarrow u_n = v_n + 2000$, on en déduit que : pour tout entier naturel n , $u_n = 500 \times 0,96^n + 2000$.

5.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n &= 500 \times 0,96^{n+1} + 2000 - (500 \times 0,96^n + 2000) \\ &= 500 \times 0,96^{n+1} - 500 \times 0,96^n \\ &= 500 \times 0,96^n (0,96 - 1) \\ &= 500 \times 0,96^n \times (-0,04) \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0,96^n > 0$. Donc, quel que soit $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n < 0$, et la suite (u_n) est donc strictement décroissante.

6. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{11} u_k &= \sum_{k=0}^{11} (v_k + 2000) \\ &= \sum_{k=0}^{11} v_k + \sum_{k=0}^{11} 2000 \\ &= 500 \times \frac{1 - 0,96^{12}}{1 - 0,96} + 12 \times 2000 \\ &\approx 28\,841 \end{aligned}$$

Soit une somme totale perçue $S = 10 \times 28\,841 = 288\,410$.

La somme totale que l'association espère obtenir pour l'année 2018 est d'environ 288 400 euros.

Exercice n° 3 :

On considère ci-contre le tableau des notes obtenues par une classe de première de 35 élèves au dernier contrôle de mathématiques :

1. Quel est le mode de cette série statistique ?
2. Quelle est l'étendue de cette série statistique ?
3. Quelle est la moyenne de la classe ?
4. Déterminer la médiane de la série statistique.
Interpréter le résultat obtenu.
5. Déterminer le premier et le troisième quartiles de la série.
Interpréter le résultat obtenu.
6. Représenter le diagramme en boîte (boîte à moustaches) associé à cette série.
7. Déterminer l'écart-type de cette série.

Notes	Nombre d'élèves ayant obtenu cette note
0	0
1	0
2	0
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	2
9	2
10	2
11	3
12	3
13	6
14	2
15	3
16	2
17	2
18	2
19	1
20	0

Solution:

1. Le mode de la série est 13 (c'est la valeur du caractère qui a le plus grand effectif).
2. L'étendue de la série est $19 - 3 = 16$.
3. On note $(x_1; x_2; \dots; x_{20})$ les différentes valeurs prises par les notes et N l'effectif total de la classe. De plus, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq 20$, n_i désigne le nombre d'élèves ayant obtenu la note x_i .

La moyenne $\bar{x}$ vaut

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{20} n_i x_i = \frac{420}{35} = \boxed{12}$$

4. $N = 35$ donc N est impair. Par conséquent, la médiane est le terme de la série d'indice $\frac{N+1}{2} = \frac{35+1}{2} = 18$.

On lit ensuite dans le tableau la valeur du 18^e terme : la médiane vaut $m_e = 13$.
La moitié des élèves de la classe a obtenu une note inférieure à 13 (et la moitié des élèves a obtenu une note supérieure à 13).

5. $\frac{N}{4} = 8,75$ donc Q_1 est le 9^e terme de la série : $Q_1 = 9$.

$\frac{3N}{4} = 26,25$ donc Q_3 est le 27^e terme de la série : $Q_3 = 15$.

Ainsi, 25 % des élèves ont une note inférieure à 9 et 25 % des élèves ont une note supérieure à 15.

6. En utilisant la formule de König-Huygens, l'écart-type σ est donné par

$$\sigma = \sqrt{x^2 - \bar{x}^2}$$

On calcule la moyenne des carrés des notes

$$\bar{x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{20} n_i x_i^2$$

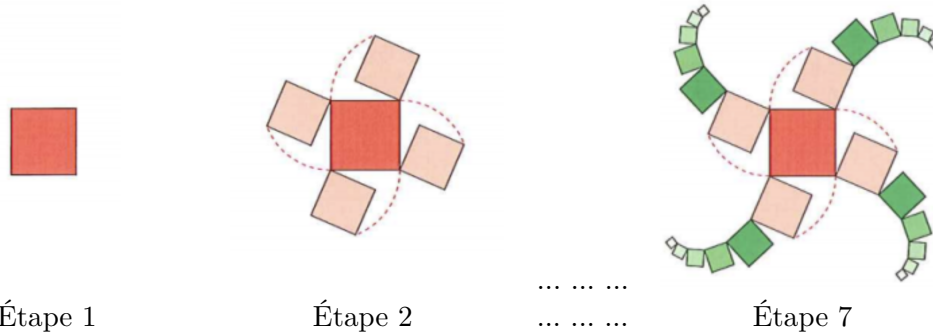
On trouve $\bar{x^2} = \frac{5600}{35} = 160$.

D'où

$$\sigma = \sqrt{160 - 12^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Exercice n° 4

À partir d'un carré de côté 1 cm, on construit étape par étape d'autres carrés pour obtenir les figures suivantes :



Le but de cet exercice est de répondre à la question « Peut-on trouver une étape à partir de laquelle l'aire de la figure dépasse 5 ? »

1. Soit $(c_n)_{n \geq 1}$ la suite donnant les longueurs des côtés des nouveaux carrés construits à chaque étape (l'étape correspond à n , pour $n \in \mathbb{N}^*$).
 - (a) Justifier que $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 - (b) Donner la nature de la suite $(c_n)_{n \geq 1}$ et l'expression de son terme général en fonction de n .
2. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ l'aire de chaque nouveau carré créé à l'étape n .
 - (a) Justifier que $a_2 = \frac{1}{2}$
 - (b) Justifier que, que que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$
3. Soit $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 1}$ l'aire totale de la figure à l'étape n .
 - (a) Justifier que $\mathcal{A}_2 = 1 + 4 \times \frac{1}{2}$
 - (b) Soit $n \geq 1$. Exprimer l'aire $\mathcal{A}_n$ à l'aide du symbole $\sum$
 - (c) Exprimer la somme précédente en fonction de n .
4. Répondre à la question initialement posée : peut-on trouver une étape à partir de laquelle l'aire de la figure dépasse 5 ?

Solution:

1. (a) Soit $(c_n)_{n \geq 1}$ la suite donnant les côtés successifs des carrés des nouveaux carrés construits à chaque étape :

$$c_1 = 1 \quad \text{et} \quad c_2 = c_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

En effet, la longueur de la diagonale des nouveaux carrés de l'étape 2 est égale à celle du côté du carré initial, donc il faut diviser c_1 par $\sqrt{2}$.

- (b) De même :

$$c_3 = c_2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$c_{n+1} = c_n \times \frac{1}{\sqrt{2}} = c_n \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La suite $(c_n)_{n \geq 1}$ est la suite géométrique de premier terme $c_0 = 1$ et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc,

$$c_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1}$$

2. (a) a_2 est l'aire d'un carré de longueur de côté $c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc

$$a_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- (b) L'aire de chaque carré est donc

$$\begin{aligned} a_n &= (c_n)^2 \\ &= \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \right)^2 \\ &= \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

3. (a) L'aire totale à l'étape 2 est : $1 + 4a_2 = 1 + 4 \times \frac{1}{2} = 3$
 (b) L'aire totale à l'étape n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) est égale à :
 $1 + 4a_2 + 4a_3 + \dots + 4a_n = 1 + 4 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2^2} + 4 \times \frac{1}{2^3} + \dots + 4 \times \frac{1}{2^{n-1}}$

On note ceci, à l'aide du symbole $\sum$: $\mathcal{A}_n = 1 + \sum_{k=2}^n \left(4 \times \frac{1}{2^{k-1}} \right)$

(c) On obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n &= 1 + \sum_{k=2}^n \left(4 \times \frac{1}{2^{k-1}} \right) \\ &= 1 + 4 \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 1 + 4 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} \\ &= 1 + 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 + 4 \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ &= 1 + 4 - \frac{4}{2^{n-1}} \\ &= \boxed{5 - \frac{1}{2^{n-3}}} \end{aligned}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2^{n-3}} > 0$.
 Donc l'aire totale de la figure est toujours strictement inférieure à 5.

Bonus

La suite (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_4 = 1$ et $\frac{1}{u_1 \times u_2} + \frac{1}{u_2 \times u_3} = 2$

Déterminer u_0 et la raison r .

Solution: Deux solutions possibles :

- $u_0 = 1, r = 0$
- $u_0 = -\frac{13}{3}, r = \frac{4}{3}$

Correction détaillée ici : <https://www.youtube.com/watch?v=EHLcBhsM1uQ>