

Devoir sur table n°4

Mercredi 11 décembre 2024 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice n° 1 :

On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \text{ et } v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique, dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n)$
4. Exprimer la somme suivante en fonction de n : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

Exercice n° 2 :

Au premier janvier 2018, une association comptait 2 500 adhérents. Une étude a permis de modéliser l'évolution future du nombre d'adhérents de l'association. Chaque mois :

- 4 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 80 nouvelles personnes adhèrent à l'association.

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une estimation du nombre d'adhérents de l'association n mois après le 1^{er} janvier 2018.

1. Justifier que la suite (u_n) définie par $u_0 = 2\,500$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,96u_n + 80$ modélise l'évolution mensuelle du nombre d'adhérents de l'association.
2. Cette suite (u_n) est-elle arithmétique ? Justifier.
3. Cette suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifier.
4. Exprimer u_n en fonction de n (on introduira une suite auxiliaire bien choisie grâce à une propriété de cours...)
5. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
6. Le montant de la cotisation mensuelle à l'association est de 10 euros. Calculer la somme totale, arrondie à la centaine d'euros près, que l'association espère obtenir pour l'année 2018.

Exercice n° 3 :

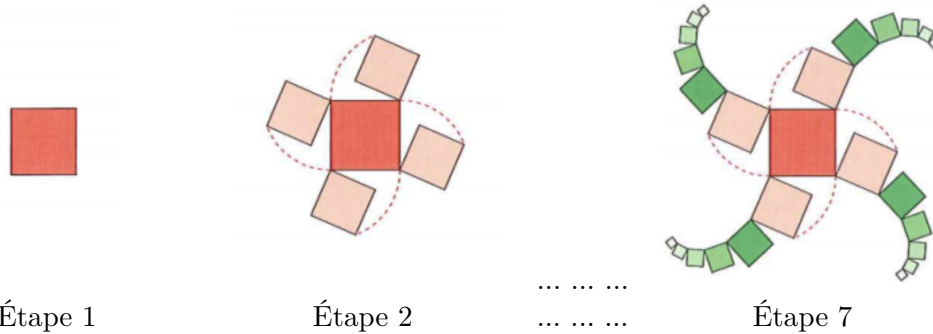
On considère ci-contre le tableau des notes obtenues par une classe de première de 35 élèves au dernier contrôle de mathématiques :

1. Quel est le mode de cette série statistique ?
2. Quelle est l'étendue de cette série statistique ?
3. Quelle est la moyenne de la classe ?
4. Déterminer la médiane de la série statistique.
Interpréter le résultat obtenu.
5. Déterminer le premier et le troisième quartiles de la série.
Interpréter le résultat obtenu.
6. Représenter le diagramme en boîte (boîte à moustaches) associé à cette série.
7. Déterminer l'écart-type de cette série.

Notes	Nombre d'élèves ayant obtenu cette note
0	0
1	0
2	0
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	2
9	2
10	2
11	3
12	3
13	6
14	2
15	3
16	2
17	2
18	2
19	1
20	0

Exercice n° 4

À partir d'un carré de côté 1 cm, on construit étape par étape d'autres carrés pour obtenir les figures suivantes :



Le but de cet exercice est de répondre à la question « Peut-on trouver une étape à partir de laquelle l'aire de la figure dépasse 5 ? »

- Soit $(c_n)_{n \geq 1}$ la suite donnant les longueurs des côtés des nouveaux carrés construits à chaque étape (l'étape correspond à n , pour $n \in \mathbb{N}^*$).
 - Justifier que $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 - Donner la nature de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et l'expression de son terme général en fonction de n .
- Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ l'aire de chaque nouveau carré créé à l'étape n .
 - Justifier que $a_2 = \frac{1}{2}$
 - Justifier que, que que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$
- Soit $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'aire totale de la figure à l'étape n .
 - Justifier que $\mathcal{A}_2 = 1 + 4 \times \frac{1}{2}$
 - Soit $n \geq 1$. Exprimer l'aire $\mathcal{A}_n$ à l'aide du symbole $\sum$
 - Exprimer la somme précédente en fonction de n .
- Répondre à la question initialement posée : peut-on trouver une étape à partir de laquelle l'aire de la figure dépasse 5 ?

Bonus

La suite (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_4 = 1$ et $\frac{1}{u_1 \times u_2} + \frac{1}{u_2 \times u_3} = 2$

Déterminer u_0 et la raison r .