

Devoir sur table n°3

Mercredi 20 novembre 2024 - 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice n° 1 : QCM (2 points)

Pour chacune des propositions suivantes, entourer la bonne réponse (sans justification).

1) Soit (u_n) la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n}{\sqrt{n+1}}$. Que vaut u_3 ?	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2
2) Soit (u_n) la suite des entiers impairs. Quelle relation a-t-on entre u_{n+1} et u_n ?	$u_{n+1} = u_n + 1$	$u_{n+1} = u_n + 2$	$u_{n+1} = 2u_n$	$u_{n+1} = 2u_n + 1$	$u_{n+1} = 2(u_n + 1)$
3) Soit (u_n) la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - n + 1$. Que vaut u_{n+1} ?	$2^{n+1} - n + 1$	$2^n - n$	$2^{n+1} - n + 2$	$2^{n+1} - n$	$2^{2n} - n$
4) Soit (u_n) la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + n - 1$. Que vaut $u_{n+1} - u_n$?	3	$2n + 1$	$2n + 2$	$n + 1$	$2n - 1$

Solution:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------|
| 1. 3 (réponse b) | 3. $2^{n+1} - n$ (réponse d) |
| 2. $u_{n+1} = u_n + 2$ (réponse b) | 4. $2n + 2$ (réponse c) |

Exercice n° 2 : conjecture de Syracuse (3 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite dite « de Syracuse de premier terme 9 », c'est-à-dire la suite définie par $u_0 = 9$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- si u_n est pair, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$
- si u_n est impair, $u_{n+1} = 3u_n + 1$

Donner les sept premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en justifiant les calculs.

Solution:

1. $u_0 = 9$
2. $u_1 = 3 \times u_0 + 1 = 28$
3. $u_2 = \frac{u_1}{2} = 14$
4. $u_3 = \frac{u_2}{2} = 7$
5. $u_4 = 3 \times u_3 + 1 = 22$
6. $u_5 = \frac{u_4}{2} = 11$
7. $u_6 = 3 \times u_5 + 1 = 34$

Pour information : La *conjecture de Syracuse* affirme que, quelle que soit la valeur de u_0 , il existe un entier naturel n tel que $u_n = 1$. Cette conjecture n'est toujours pas démontrée à l'heure actuelle.

Exercice n° 3 : sens de variation (2 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -\frac{3n}{n+1}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle monotone ? Justifier par un calcul.

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= -\frac{3(n+1)}{n+1+1} + \frac{3n}{n+1} \\
 &= \frac{-3n-3}{n+2} + \frac{3n}{n+1} \\
 &= \frac{(-3n-3)(n+1) + 3n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{-3n^2 - 3n - 3n - 3 + 3n^2 + 6n}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{-3}{(n+1)(n+2)}
 \end{aligned}$$

Puisque $n \in \mathbb{N}^*$, $n+1 > 0$ et $n+2 > 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

Ainsi la suite (u_n) est strictement décroissante.

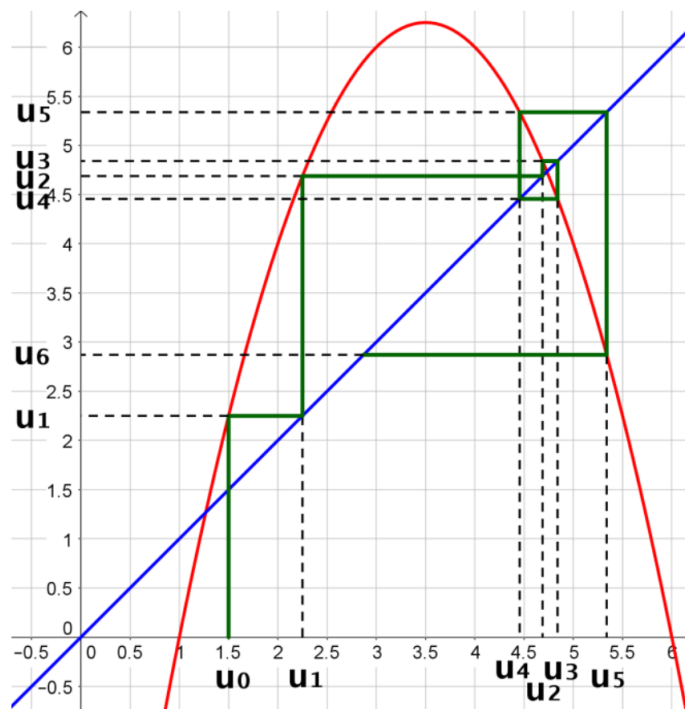
Exercice n° 4 : une représentation graphique (3 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -(u_n)^2 + 7u_n - 6 \end{cases}$$

On a représenté en annexe la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 7x - 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Représenter les sept premiers termes de la suite (u_n) sur le graphique donné en annexe.
2. La suite (u_n) semble-t-elle être monotone ? Répondre en s'aidant du graphique.
3. Conjecturer la limite de la suite (u_n) . Répondre en s'aidant du graphique.

Solution:



- 1.
2. La suite (u_n) n'est pas monotone.
3. La limite de la suite semble être environ 4,75.

Exercice n° 5 : une suite homographique (5 points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{10 u_n}{10 + u_n} \end{cases}$

On admet que, pour tout entier n , $u_n > 0$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3
2. On pose $v_n = \frac{5}{u_n}$ pour tout entier naturel n . Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Donner sa raison r et son premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n
4. En déduire l'expression du terme général de u_n en fonction de n .

Solution:

$$1. \quad u_1 = \frac{10 \times 5}{10 + 5} = \frac{10}{3}, \quad u_2 = \frac{10 \times \frac{10}{3}}{10 + \frac{10}{3}} = \frac{\frac{100}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{100}{4} = \frac{5}{2}, \quad u_3 = \frac{10 \times \frac{5}{2}}{10 + \frac{5}{2}} = \frac{50}{\frac{25}{2}} = 2$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{5}{u_{n+1}} - \frac{5}{u_n} \\ &= \frac{5}{\frac{10 u_n}{10 + u_n}} - \frac{5}{u_n} \\ &= \frac{5}{10 u_n} \times (10 + u_n) - \frac{5}{u_n} \\ &= \frac{1}{2 u_n} \times (10 + u_n) - \frac{10}{2 u_n} \\ &= \frac{u_n}{2 u_n} = 2 \end{aligned}$$

Donc, (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme

$$v_0 = \frac{5}{u_0} = \frac{5}{5} = 1$$

3. L'expression explicite de v_n en fonction de n est donc :

$$v_n = v_0 + n \times r = 1 + 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4. On en déduit l'expression explicite de u_n en fonction de n :

$$u_n = \frac{5}{v_n} = \frac{5}{1 + 2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice n° 6 : détermination d'une suite avec trois termes (5 points)

On considère une suite arithmétique croissante (u_n) telle que :

$$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 84 \\ u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 = 2370 \end{cases}$$

- Déterminer la valeur de u_0 , u_1 et u_2 .
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i$. Déterminer la valeur de l'entier n tel que $S_n = 385$.

Solution:

- Notons r la raison de la suite arithmétique. On sait que $r > 0$.

On peut écrire

$$u_0 = u_1 - r \text{ et } u_2 = u_1 + r.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 84 \\ u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 = 2370 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3u_1 = 84 \\ (u_1 - r)^2 + u_1^2 + (u_1 + r)^2 = 2370 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u_1 = 28 \\ (28 - r)^2 + 28^2 + (28 + r)^2 = 2370 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u_1 = 28 \\ 2r^2 + 3 \times 28^2 = 2370 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u_1 = 28 \\ 2r^2 = 2370 - 3 \times 28^2 = 18 \end{cases} \end{aligned}$$

On sait que la raison r est positive, d'où $r = 3$. Les trois premiers termes de (u_n) sont

$$u_0 = 25, \quad u_1 = 28 \text{ et } u_2 = 31$$

- La suite (u_k) est arithmétique donc son terme général s'écrit

$$u_k = u_0 + kr \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

De plus,

$$S_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n + 1),$$

c'est-à-dire

$$S_n = \frac{u_0 + u_0 + nr}{2} \times (n + 1) = \frac{2u_0 + nr}{2} \times (n + 1)$$

On sait que $S_n = 385$, $u_0 = 25$ et $r = 3$.

L'entier n vérifie donc la relation

$$\begin{aligned} 385 &= \frac{50 + 3n}{2} \times (n + 1) \iff 770 = (50 + 3n)(n + 1) \\ &\iff 770 = 3n^2 + 53n + 50 \\ &\iff 3n^2 + 53n - 720 = 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant

$$\Delta = 53^2 - 4 \times (-720) \times 3 = 11449 = 107^2 > 0$$

L'équation a donc deux racines

$$\frac{-53 - 107}{2 \times 3} = -\frac{80}{3} \text{ et } \frac{-53 + 107}{2 \times 3} = 9.$$

Or, $n \in \mathbb{N}$ donc seule la valeur 9 convient. D'où, $\boxed{n = 9}$

Bonus

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n .

Indication : On pourra calculer les premiers termes de la suite.

Solution:

- $u_0 = 2$
- $u_1 = 5$
- $u_2 = 5 \times 5 - 6 \times 2 = 25 - 12 = 13$
- $u_3 = 5 \times 13 - 6 \times 5 = 65 - 30 = 35$
- $u_4 = 5 \times 35 - 6 \times 13 = 175 - 78 = 97$

On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^n + 3^n$$

Annexe à l'exercice 4