

Devoir sur table n°3

Mercredi 20 novembre 2024 - 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice n° 1 : QCM (2 points)

Pour chacune des propositions suivantes, entourer la bonne réponse (sans justification).

1) Soit (u_n) la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n}{\sqrt{n+1}}$. Que vaut u_3 ?	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2
2) Soit (u_n) la suite des entiers impairs. Quelle relation a-t-on entre u_{n+1} et u_n ?	$u_{n+1} = u_n + 1$	$u_{n+1} = u_n + 2$	$u_{n+1} = 2u_n$	$u_{n+1} = 2u_n + 1$	$u_{n+1} = 2(u_n + 1)$
3) Soit (u_n) la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - n + 1$. Que vaut u_{n+1} ?	$2^{n+1} - n + 1$	$2^n - n$	$2^{n+1} - n + 2$	$2^{n+1} - n$	$2^{2n} - n$
4) Soit (u_n) la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + n - 1$. Que vaut $u_{n+1} - u_n$?	3	$2n + 1$	$2n + 2$	$n + 1$	$2n - 1$

Exercice n° 2 : conjecture de Syracuse (3 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite dite « de Syracuse de premier terme 9 », c'est-à-dire la suite définie par $u_0 = 9$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- si u_n est pair, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$
- si u_n est impair, $u_{n+1} = 3u_n + 1$

Donner les sept premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en justifiant les calculs.

Pour information : La *conjecture de Syracuse* affirme que, quelle que soit la valeur de u_0 , il existe un entier naturel n tel que $u_n = 1$. Cette conjecture n'est toujours pas démontrée à l'heure actuelle.

Exercice n° 3 : sens de variation (2 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -\frac{3n}{n+1}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle monotone ? Justifier par un calcul.

Exercice n° 4 : une représentation graphique (3 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1, 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -(u_n)^2 + 7u_n - 6 \end{cases}$$

On a représenté en annexe la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 7x - 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Représenter les sept premiers termes de la suite (u_n) sur le graphique donné en annexe.
2. La suite (u_n) semble-t-elle être monotone ? Répondre en s'aidant du graphique.
3. Conjecturer la limite de la suite (u_n) . Répondre en s'aidant du graphique.

Exercice n° 5 : une suite homographique (5 points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{10 u_n}{10 + u_n} \end{cases}$$

On admet que, pour tout entier n , $u_n > 0$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3
2. On pose $v_n = \frac{5}{u_n}$ pour tout entier naturel n . Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Donner sa raison r et son premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n
4. En déduire l'expression du terme général de u_n en fonction de n .

Exercice n° 6 : détermination d'une suite avec trois termes (5 points)

On considère une suite arithmétique croissante (u_n) telle que :

$$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 84 \\ u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 = 2370 \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de u_0 , u_1 et u_2 .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i$. Déterminer la valeur de l'entier n tel que $S_n = 385$.

Bonus

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n .

Indication : On pourra calculer les premiers termes de la suite.

Annexe à l'exercice 4