

Devoir sur table n°2

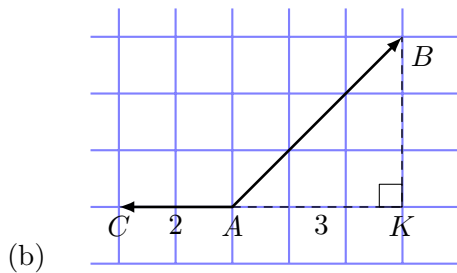
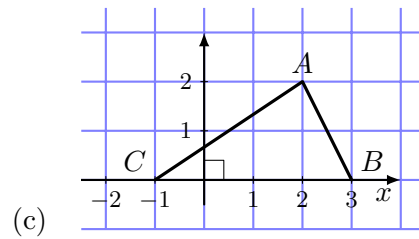
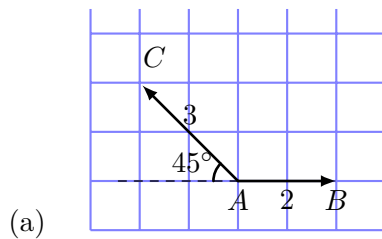
Mercredi 16 octobre 2024 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Questions de cours (5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Dans chacun des quatre cas suivants, calculer la valeur exacte du produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$



- (d) Si ABC est un triangle tel que $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé et m est un réel. On considère les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ m+2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 4m \\ -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{n+1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- (a) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
(b) Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$$

Solution:

1. On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ D'après la figure, on a :

$$\begin{aligned} - \widehat{BAC} &= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \\ - AB &= 2, AC = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 3 \times \cos \frac{3\pi}{4} = 6 \times \frac{-\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}.$$

2. On a $(BK) \perp (AC)$ et $K \in (AC)$ donc K est le projeté orthogonal de B sur (AC) . Donc,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AK}$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont de sens contraires donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AC \times AK = -2 \times 3 = -6$$

3) On lit $A(2; 2)$, $B(3; 0)$ et $C(-1; 0)$. Donc, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Le repère est orthonormé, donc,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-3) + (-2) \times (-2) = 1$$

4) On sait que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et que $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CB}\|$.

D'après la première identité de polarisation :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (4^2 + 5^2 - 6^2) \\ &= \frac{1}{2} (16 + 25 - 36) \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}.$$

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Le repère est orthonormé donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4m + (m+2) \times (-1) = 11m - 2$.

Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $m = \frac{2}{11}$.

3. (a) f est une fonction puissance donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (n+1)x^n$.

En particulier, $f'(1) = n+1$ et $f(1) = 1$.

On note $\mathcal{T}_1$ la tangente au point d'abscisse 1. Son équation est

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

c'est-à-dire $y = (n+1)x - n$

- (b) f est une fonction puissance donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+$. Ceci signifie que sur $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier de la tangente au point d'abscisse 1. Autrement dit, pour tout $x \geq 0$,

$$x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$$

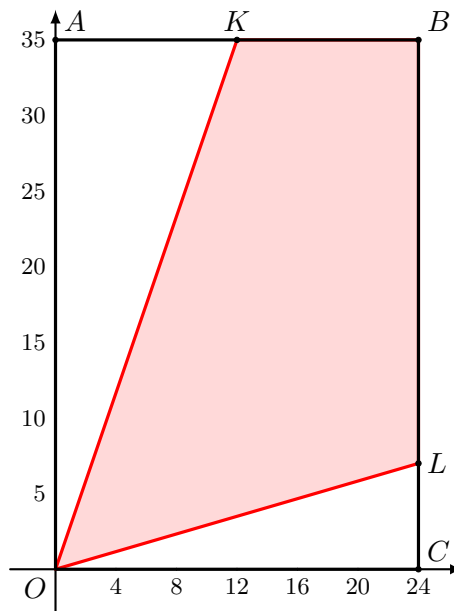
qui est l'inégalité demandée.

Exercice 2 : une place touristique (3,5 points)

Le rectangle $OABC$ ci-dessous représente une place touristique vue de dessus.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $C(24; 0)$ et $A(0; 35)$.

Afin d'éclairer le plus grand nombre de monuments, on place au point O , un projecteur lumineux qui permet d'éclairer la partie du plan délimitée par les segments de droite $[OK]$ et $[OL]$ tels que K est le milieu de $[AB]$ et $\vec{CL} = \frac{1}{5}\vec{CB}$.



1. Déterminer les coordonnées des points B , K et L .
2. Un visiteur affirme :

« Moins de 70 % de la surface de la place est éclairée ».

Cette affirmation est-elle exacte ?

3. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OL}$
- (b) En déduire la mesure exacte, puis arrondie au dixième de degré, de l'angle $\widehat{KOL}$

Solution:

1. $B(24; 35)$, $K(12; 35)$ et $L\left(24; \frac{35}{5}\right)$ c'est-à-dire $L(24; 7)$.
2. L'aire du triangle OAK , notée $\mathcal{A}(OAK)$, est

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(OAK) &= \frac{1}{2} \times OA \times AK \\ &= \frac{1}{2} \times 35 \times 12 \\ &= 210\end{aligned}$$

De même, l'aire du triangle OCL , notée $\mathcal{A}(OCL)$, est

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(OCL) &= \frac{1}{2} \times OC \times CL \\ &= \frac{1}{2} \times 24 \times 7 \\ &= 84\end{aligned}$$

Enfin, l'aire du rectangle $OABC$, notée $\mathcal{A}(OABC)$, est

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(OABC) &= OA \times OC \\ &= 35 \times 24 \\ &= 840\end{aligned}$$

L'aire du quadrilatère $OKBL$, notée $\mathcal{A}(OKBL)$, est donc

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(OKBL) &= \mathcal{A}(OABC) - \mathcal{A}(OAK) - \mathcal{A}(OCL) \\
 &= 840 - 210 - 84 \\
 &= 546
 \end{aligned}$$

Ainsi le pourcentage de la place éclairé est $\frac{546}{840} \times 100 = 65$. L'affirmation du visiteur est vraie.

3. (a) O est l'origine du repère, donc le vecteur $\overrightarrow{OK}$ a comme coordonnées $\begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{OL}$ a comme coordonnées $\begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}$. Le repère est orthonormé, on a donc

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OL} &= 12 \times 24 + 35 \times 7 \\
 &= 533
 \end{aligned}$$

- (b) $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OL} = OK \times OL \times \cos(\widehat{KOL})$ donc

$$\begin{aligned}
 \cos(\widehat{KOL}) &= \frac{\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OL}}{OK \times OL} \\
 &= \frac{533}{\sqrt{12^2 + 35^2} \times \sqrt{24^2 + 7^2}} \\
 &= \frac{533}{37 \times 25} \\
 &= \frac{533}{925}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\widehat{KOL} = \arccos\left(\frac{533}{925}\right)$$

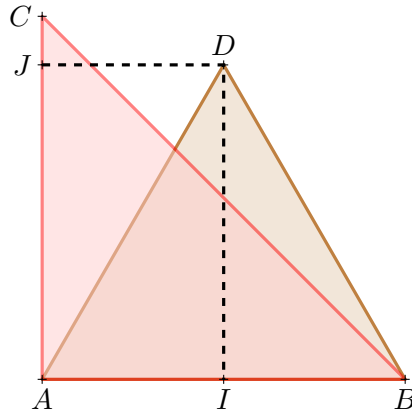
D'après la calculatrice, on obtient

$$\widehat{KOL} \approx 54,8^\circ$$

Exercice 3 : Trouver la valeur du cosinus d'un angle remarquable (5 points)

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle isocèle en A , ABD est un triangle équilatéral, I est le milieu de $[AB]$ et J est le projeté orthogonal de D sur $[AC]$.

On pose $AB = a$.



- Montrer que $AJ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$
 - Calculer $\vec{BD} \cdot \vec{BA}$ et $\vec{BD} \cdot \vec{AC}$ en fonction de a
 - En déduire $\vec{BD} \cdot \vec{BC}$ en fonction de a
- Déterminer **sans calculatrice** une mesure en radian de l'angle $\widehat{DBC}$
- Déduire des résultats précédents que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

Solution:

- On sait que le triangle ABD est équilatéral de côté a et que I est le milieu de $[AB]$. Donc, dans ABD , la médiane (DI) est aussi la hauteur issue de D . D'où, $(DI) \perp (AB)$.

De plus, ABC est rectangle en A donc $(AJ) \perp (AI)$. Enfin, J est le projeté orthogonal de D sur (AC) donc $(DJ) \perp (AC)$.

Ainsi, le quadrilatère $AIDJ$ a trois angles droits : c'est donc un rectangle.

On en déduit que $AJ = ID$.

Comme ABD est équilatéral, on a en particulier $\widehat{DAI} = \frac{\pi}{3}$.

Dans le triangle AID rectangle en I , on a ensuite :

$$\sin \widehat{DAI} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{ID}{AD} = \frac{ID}{a}$$

d'où $ID = a \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi $AJ = a \frac{\sqrt{3}}{2}$

- (b) D'après la question précédente, $I \in (AB)$ et $(DI) \perp (AB)$ donc I est le projeté orthogonal de D sur (AB) . D'où,

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$$

I est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

Finalement, $\boxed{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}^2 = \frac{a^2}{2}}.$

On sait que $(BA) \perp (AC)$ donc A est le projeté orthogonal de B sur (AC) . On sait aussi d'après l'énoncé que J est le projeté orthogonal de D sur (AC) .

Donc, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AC} = AJ \times AC$ c'est-à-dire

$$\boxed{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

- (c) On a

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$$

d'où

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2} + a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{a^2 \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)}$$

2. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DBC}$ sont adjacents. On a donc :

$$\widehat{DBC} = \widehat{ABD} - \widehat{ABC}$$

ABD est équilatéral donc $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{3}$.

ABC est rectangle en A et isocèle donc $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi

$$\widehat{DBC} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{12}}$$

3. Le produit scalaire $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$ vaut

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = BD \times BC \times \cos \frac{\pi}{12}$$

BC est l'hypoténuse du triangle ABC rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2a^2$, d'où $BC = a\sqrt{2}$.

Ainsi, on a

$$a \times a\sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{12} = a^2 \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)$$

et finalement $\boxed{\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}}$

Exercice 4 : Étude d'une fonction (9 points)

On note f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de définition de f .

Solution: f est définie pour tout x tel que :

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

D'où $\mathcal{D}_f = [-2; 0[\cup]0; 2]$

2. Étudier la parité de f .

Solution: Le domaine de définition de f , $\mathcal{D}_f$, est symétrique par rapport à 0. Soit $x \in \mathcal{D}_f$. On a

$$f(-x) = \frac{\sqrt{4-(-x)^2}}{-x} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} = -f(x)$$

car $x \mapsto x^2$ est paire.

Ainsi, f est impaire.

3. (a) On note $\mathcal{D}'$ l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ privé de ses bornes. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}'$. *On n'étudiera pas la dérivabilité de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.*

Solution: On sait que :

- $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.
- $v : x \mapsto 4-x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car v est un polynôme). De plus, $v(x) > 0$ pour tout $x \in]-2; 2[$.

Donc, par composition, la fonction $u \circ v : x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ est dérivable sur $] -2; 2[$.

De plus, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Par produit, on en déduit que f est dérivable sur $] -2; 0[\cup]0; 2[$, c'est-à-dire sur $\mathcal{D}'$.

(b) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}'$,

$$f'(x) = \frac{-4}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

Solution: Soit $x \in \mathcal{D}'$. On a (avec les notations de la question a)

$$f(x) = \frac{1}{x} \times u \circ v(x)$$

On calcule $(u \circ v)'(x)$:

$$(u \circ v)'(x) = u'(v(x)) \times v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \times (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \times \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x} \times \left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right) \\ &= \frac{-\sqrt{4-x^2}}{x^2} + \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{-(4-x^2)}{x^2\sqrt{4-x^2}} + \frac{-x^2}{x^2\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{-4+x^2-x^2}{x^2\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

On obtient bien $f'(x) = \frac{-4}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

4. Étudier les variations de f

Solution: Soit $x \in \mathcal{D}'$.

On sait que $x^2 > 0$ et $\sqrt{4-x^2} > 0$ donc $f'(x) < 0$.

Donc, f est strictement décroissante sur $] -2; 0[$ et sur $]0; 2[$.

De plus, $f(-2) = f(2) = 0$.

5. On admet que f' est dérivable sur $\mathcal{D}'$ et que, pour tout $x \in \mathcal{D}'$, on a :

$$f''(x) = \frac{-4(3x^2-8)}{x^3(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

Étudier la convexité de f et préciser les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Solution: Étudions le signe de f'' . Soit $x \in \mathcal{D}'$.

On sait que $4 - x^2 > 0$, $\sqrt{4 - x^2} > 0$.

De plus, $x^3 > 0 \iff x > 0$. Enfin,

$$8 - 3x^2 = 0 \iff x = -\frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ ou } x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

et

$$8 - 3x^2 > 0 \iff x^2 < \frac{8}{3} \iff -\sqrt{\frac{8}{3}} < x < \sqrt{\frac{8}{3}} \iff -\frac{2\sqrt{6}}{3} < x < \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

f est convexe sur $[-2; -\frac{2\sqrt{6}}{3}]$, puis concave sur $[-\frac{2\sqrt{6}}{3}; 0[$.

f est ensuite convexe sur $]0; \frac{2\sqrt{6}}{3}]$ puis concave sur $[\frac{2\sqrt{6}}{3}; 2]$.

f change de concavité en $x_1 = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$ et en $x_2 = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Ceci signifie que $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion M_1 et M_2 d'abscisses respectives x_1 et x_2 .

$$f(x_2) = \frac{\sqrt{4 - \frac{8}{3}}}{\sqrt{\frac{8}{3}}} = \frac{\sqrt{\frac{24 - 8}{3}}}{\sqrt{\frac{8}{3}}} = \sqrt{\frac{16}{3}} \times \sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{2}.$$

f étant impaire, $f(x_1) = -f(x_2) = -\sqrt{2}$.

Les deux points d'inflexion sont donc $M_1 \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; -\sqrt{2} \right)$ et $M_2 \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}; \sqrt{2} \right)$

6. Donner l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_1$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 1$.

Solution: $\mathcal{T}_1$ a pour équation

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

On a $f(1) = \sqrt{3}$ et $f'(1) = -\frac{4}{\sqrt{3}} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$

L'équation de $\mathcal{T}_1$ est donc $y = \sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3}(x - 1)$ c'est à dire $y = -\frac{4\sqrt{3}}{3}x + \frac{7\sqrt{3}}{3}$

7. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{x}$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_g$ et de $\mathcal{T}_1$.

Solution: Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On considère le point $M(x; \frac{\sqrt{3}}{x})$ de $\mathcal{C}_g$ et le point $M'(x; -\frac{4\sqrt{3}}{3}x + \frac{7\sqrt{3}}{3})$ de $\mathcal{T}_1$ de même abscisse que M .

On pose $h(x) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}x + \frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{x}$.

M' est au-dessus de M lorsque $h(x) \geq 0$ et en-dessous si $h(x) \leq 0$.

Étudions le signe de $h(x)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-4x + 7 - \frac{3}{x} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{-4x^2 + 7x - 3}{x} \end{aligned}$$

On remarque que $x = 1$ est racine évidente du numérateur.

Donc,

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{(x-1)(-4x+3)}{x}$$

$$\text{On en déduit que } \begin{cases} h(x) \geq 0 & \text{si } x < 0 \\ h(x) \leq 0 & \text{si } 0 < x \leq \frac{3}{4}, \\ h(x) \geq 0 & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \\ h(x) \leq 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

ce qui signifie que :

$\mathcal{T}_1$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $] -\infty; 0[\cup [\frac{3}{4}; 1]$ et en dessous sur $]0; \frac{3}{4}] \cup [1; +\infty[$.