

Devoir sur table n°2

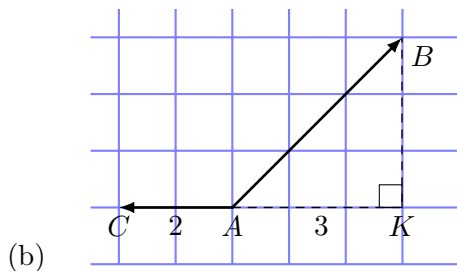
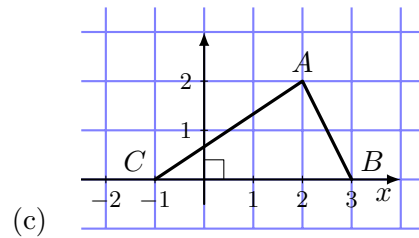
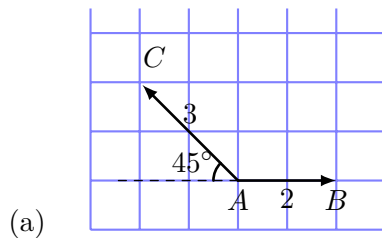
Mercredi 16 octobre 2024 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Questions de cours (5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Dans chacun des quatre cas suivants, calculer la valeur exacte du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$



- (d) Si ABC est un triangle tel que $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé et m est un réel. On considère les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ m+2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 4m \\ -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{n+1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

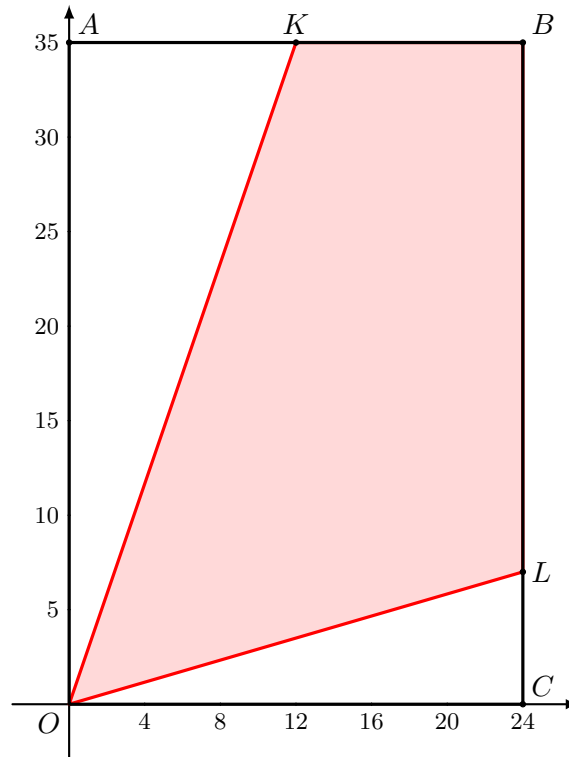
- (a) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
(b) Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$$

Exercice 2 : une place touristique (3,5 points)

Le rectangle $OABC$ ci-dessous représente une place touristique vue de dessus.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $C(24; 0)$ et $A(0; 35)$. Afin d'éclairer le plus grand nombre de monuments, on place au point O , un projecteur lumineux qui permet d'éclairer la partie du plan délimitée par les segments de droite $[OK]$ et $[OL]$ tels que K est le milieu de $[AB]$ et $\vec{CL} = \frac{1}{5}\vec{CB}$.



1. Déterminer les coordonnées des points B , K et L .
2. Un visiteur affirme :

« Moins de 70 % de la surface de la place est éclairée ».

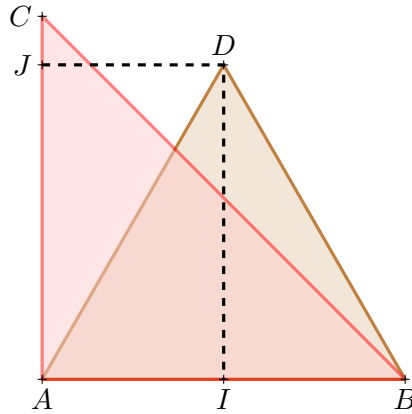
Cette affirmation est-elle exacte ?

3. (a) Calculer le produit scalaire : $\vec{OK} \cdot \vec{OL}$
- (b) En déduire la mesure exacte, puis arrondie au dixième de degré, de l'angle $\widehat{KOL}$

Exercice 3 : Trouver la valeur du cosinus d'un angle remarquable (5 points)

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle isocèle en A , ABD est un triangle équilatéral, I est le milieu de $[AB]$ et J est le projeté orthogonal de D sur $[AC]$.

On pose $AB = a$.



1. (a) Montrer que $AJ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$
 (b) Calculer $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de a
 (c) En déduire $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de a
2. Déterminer une mesure en radian de l'angle $\widehat{DBC}$
3. Déduire des résultats précédents que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

Exercice 4 : Étude d'une fonction (9 points)

On note f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de définition de f .
2. Étudier la parité de f .
3. (a) On note $\mathcal{D}'$ l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ privé de ses bornes.
Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}'$. *On n'étudiera pas la dérivabilité de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.*
(b) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}'$,

$$f'(x) = \frac{-4}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

4. Étudier les variations de f
5. On admet que f' est dérivable sur $\mathcal{D}'$ et que, pour tout $x \in \mathcal{D}'$, on a :

$$f''(x) = \frac{-4(3x^2 - 8)}{x^3(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

Étudier la convexité de f et préciser les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

6. Donner l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_1$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 1$.
7. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{x}$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_g$ et de $\mathcal{T}_1$.