

Devoir sur table n°1

Mercredi 25 septembre 2024 – 1 heure 50

Exercice 1 : Vrai ou Faux

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

1. La fonction $x \mapsto \cos^2(x)$ est π -périodique sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel x , $(\cos(x) + \sin(x))^2 = 1$.
3. Il existe une unique fonction à la fois paire et impaire sur $\mathbb{R}$.
4. Si T est un nombre réel strictement positif, il existe une fonction T -périodique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Application du cours

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Soit f la fonction $x \mapsto \frac{-x+1}{2x+1}$.
 - (a) Déterminer son ensemble de définition.
 - (b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer une propriété du point $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, que l'on précisera.
 - (c) Démontrer cette propriété.
2. La fonction définie, pour tout $x \in [1; +\infty[$, par $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2-1}$ est-elle dérivable en 1 ?
3. Justifier la dérivabilité puis déterminer la fonction dérivée de la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :
$$g(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$
4. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et impaire. Montrer que f' est une fonction paire.

Exercice 3 : Fonction et trigonométrie

1. Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que, pour tout réel $x \in I$, $u(x) \in J$.

On suppose que u et v sont des fonctions croissantes.

Démontrer **soigneusement** que la fonction $v \circ u$ est croissante.

2. On définit sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction

$$f : x \mapsto \cos(x) \times \sin(x)$$

- (a) Soit $x \in I$. Montrer que $(f(x))^2 = g(\sin(x))$ où $g(x) = -x^4 + x^2$.

- (b) Étudier les variations de g .

- (c) Dédurre des deux questions précédentes le sens de variation de f^2 sur I .

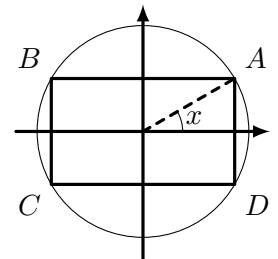
- (d) En déduire le tableau de variations de f sur I .

On pourra utiliser la question 1. ainsi que la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$.

3. On considère un rectangle inscrit dans le cercle trigonométrique, comme sur la figure ci-contre.

Pour quelles dimensions ce rectangle aura-t-il une aire maximale ?

Dans ce cas, quelle est cette aire et que peut-on dire du rectangle ?

**Exercice 4 : Une famille de fonctions****Partie 1 :**

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = -x^2 + 2x + 4$$

1. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.
2. Soit a un réel donné.
 - (a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a .
 - (b) Déterminer les réels a tels que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $a - 1$.

Partie 2 :

Soit $m \in \mathbb{R}$. De manière plus générale, on note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = -x^2 + 2x + m$$

En s'inspirant de la partie 1, déterminer, suivant les valeurs de m , le nombre de réels a tels que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $a - 1$.

Corrigé**Exercice 1 :**

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \cos^2(x)$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, qui est un ensemble symétrique par rapport à 0.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x + \pi) &= (\cos(x + \pi))^2 \\ &= (-\cos(x))^2 \\ &= \cos^2(x)\end{aligned}$$

Donc f est une fonction paire. La proposition est **vraie**.

2. Pour $x = \frac{\pi}{4}$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 &= (\sqrt{2})^2 \\ &= 2 \\ &\neq 1\end{aligned}$$

Donc la proposition est donc **fausse**.

3. Soit f une fonction à la fois paire et impaire sur son ensemble de définition $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ est donc un ensemble symétrique par rapport à 0).

Soit $x \in \mathcal{D}$, on a $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$. Ainsi $f(x) = -f(x)$, ainsi $2f(x) = 0$, et donc $f(x) = 0$. f est donc la fonction nulle sur $\mathcal{D}$.

Ainsi, si f est une fonction à la fois paire et impaire, alors f est la fonction nulle.

Réciproquement, la fonction nulle est bien à la fois paire et impaire. Il existe donc une unique fonction paire et impaire, et la proposition est **vraie**.

4. Soit T un réel strictement positif. Par exemple, la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ répond à la question. La proposition est **vraie**.

Exercice 2 :

1. (a) f est définie si et seulement si $x \mapsto 2x + 1$ ne s'annule pas.

Or, $2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$, donc

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

- (b) On conjecture que A est le centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f .

- (c) Montrons que, pour h non nul, $\frac{f\left(-\frac{1}{2}+h\right) + f\left(-\frac{1}{2}-h\right)}{2} = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{f\left(-\frac{1}{2}+h\right) + f\left(-\frac{1}{2}-h\right)}{2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{-\left(-\frac{1}{2}+h\right) + 1}{2\left(-\frac{1}{2}+h\right) + 1} + \frac{-\left(-\frac{1}{2}-h\right) + 1}{2\left(-\frac{1}{2}-h\right) + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2} - h + 1}{-1 + 2h + 1} + \frac{\frac{1}{2} + h + 1}{-1 - 2h + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{3}{2} - h}{2h} + \frac{-\frac{3}{2} - h}{-2h} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{-2h}{2h} \\ &= -\frac{1}{2} \text{ car } h \neq 0 \end{aligned}$$

ce qui caractérise le fait que A est le centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.

2. On étudie la dérivabilité de la fonction g en 1 à partir de la définition du nombre dérivé en 1. Pour $h > 0$,

$$\begin{aligned} \tau_1(h) &= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{(1+h-1)\sqrt{(1+h)^2 - 1}}{h} \\ &= \frac{h\sqrt{1+2h+h^2-1}}{h} \\ &= \sqrt{2h+h^2} \end{aligned}$$

Alors $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{2h+h^2} = 0$ existe, est unique et finie, donc la fonction f est dérivable en 0 et $f'(1) = 0$.

3. Pour tout réel x , $g(x) = \left(\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)^2 = (u(x))^2$ avec $u(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée d'une fonction affine suivie de la fonction sinus, et pour tout réel x ,

$$\begin{aligned}u'(x) &= 1 \times \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\&= \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

Donc $g = u^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = 2uu'$. Pour tout réel x ,

$$g'(x) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

4. Notons g la fonction définie sur un intervalle I par $g(x) = -x$. Cette fonction est dérivable sur I , de dérivée $g'(x) = -1$. Dire que f est impaire revient à dire que $f \circ g = -f$ sur I .

Soit $x \in I$. Par la formule de dérivation des fonctions composées

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= g'(x) \times f' \circ g(x) \\&= -f'(-x)\end{aligned}$$

Par conséquent, $-f'(-x) = -f'(x)$. En multipliant par -1 ,

$$f'(-x) = f'(x)$$

L'égalité est vraie quel que soit $x \in I$. Donc la proposition est **vraie**.

Exercice 3 : Fonction et trigonométrie

1. (a) Soit $x \in I$. Montrons que $(f(x))^2 = g(\sin(x))$ où $g(x) = -x^4 + x^2$

$$\begin{aligned}(f(x))^2 &= \cos^2(x) \sin^2(x) \\ &= (1 - \sin^2(x)) \sin^2(x) \\ &= -\sin^4(x) + \sin^2(x)\end{aligned}$$

Par conséquent $(f(x))^2 = g(\sin(x))$ où $g : t \mapsto -t^4 + t^2$.

- (b) Étudions les variations de g .

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et, quel que soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}g'(t) &= -4t^3 + 2t \\ &= 2t(1 - 2t^2) \\ &= 2t(1 - t\sqrt{2})(1 + t\sqrt{2})\end{aligned}$$

Établissons le tableau de signes de g' .

t	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$2t$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$1 - t\sqrt{2}$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$1 + t\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$

D'après ce tableau, g est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}]$

et $[0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$, et strictement décroissante sur $[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0]$ et $[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$.

(c) Déduisons des deux questions précédentes le sens de variation de f^2 sur I .

Considérons deux réels x et y tels que $0 \leq x < y \leq \frac{\pi}{4}$. Alors, par stricte croissance de la fonction sinus sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$,

$$0 \leq \sin(x) < \sin(y) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c'est-à-dire, par stricte croissance de g d'après la question précédente,

$$g(\sin(x)) < g(\sin(y))$$

Ainsi

$$0 \leq x < y \leq \frac{\pi}{4} \implies f^2(x) < f^2(y)$$

Considérons deux réels x et y tels que $\frac{\pi}{4} \leq x < y \leq \frac{\pi}{2}$. Alors, par stricte décroissance de la fonction sinus sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \geq \sin(x) > \sin(y) \geq 1$$

c'est-à-dire, par stricte décroissance de g d'après la question précédente,

$$g(\sin(x)) > g(\sin(y))$$

Ainsi

$$\frac{\pi}{4} \leq x < y \leq \frac{\pi}{2} \implies f^2(x) > f^2(y)$$

Conclusion : f^2 est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

(d) Dressons le tableau de variations de f sur I .

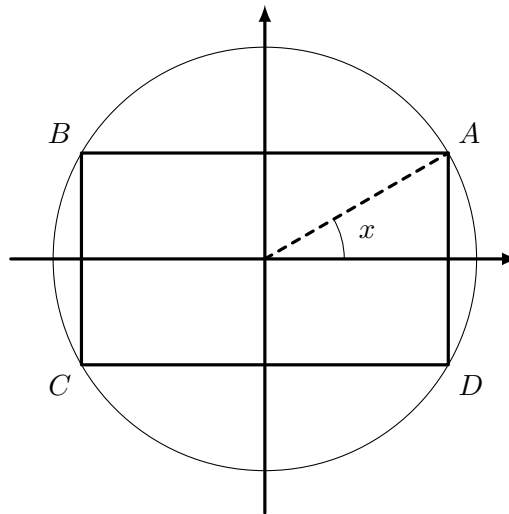
Notons tout d'abord que f est positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ car sinus et cosinus le sont. De plus, la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc, comme f^2 est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, f l'est aussi.

Pour la même raison, on montre que f est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Voici le tableau de variations de f .

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	0

2. On considère un rectangle inscrit dans le cercle trigonométrique. Soit $x \in I$. Visualisons la situation :



L'aire, en unité d'aire, du rectangle $ABCD$ est

$$\begin{aligned} AB \times AD &= 2 \cos(x) \times 2 \sin(x) \\ &= 4f(x). \end{aligned}$$

D'après la question précédente, f atteint son maximum en $x = \frac{\pi}{4}$. Donc, comme 4 est strictement positif, cette aire est maximale si et seulement si $x = \frac{\pi}{4}$, et cette aire est 2. Dans ce cas, $AB = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, c'est-à-dire $AB = \sqrt{2}$ et $AD = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, c'est-à-dire $AD = \sqrt{2}$.

Ainsi le rectangle $ABCD$ a deux côtés adjacents de même longueur, c'est donc un carré.

Exercice 4 : Une famille de fonctions**Partie 1.**

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. f est une fonction trinôme du second degré, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x , $f'(x) = -2x + 2$. Ainsi $f'(2) = -2$. De plus $f(2) = 4$. Une équation de la tangente au point d'abscisse 2 est :

$$\begin{aligned} y = f'(2)(x - 2) + f(2) &\iff y = -2(x - 2) + 4 \\ &\iff y = -2x + 8 \end{aligned}$$

2. (a) Soit a un réel. $f(a) = -a^2 + 2a + 4$ et $f'(a) = -2a + 2$, donc une équation de la tangente au point d'abscisse a à la courbe $\mathcal{C}$ est

$$y = (-2a + 2)(x - a) - a^2 + 2a + 4$$

- (b) Le point de l'axe des abscisses d'abscisse $a - 1$ a pour coordonnées $(a - 1; 0)$. Ce point appartient à la tangente au point d'abscisse a si et seulement si a est solution de l'équation $0 = (-2a + 2)(-1) - a^2 + 2a + 2$ c'est-à-dire

$$-a^2 + 4a + 4 = 0$$

Le discriminant de cette équation est 24 et ses solutions sont $a_1 = 2 + \sqrt{6}$ et $a_2 = 2 - \sqrt{6}$.

Partie 2

Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = -x^2 + 2x + m$$

La fonction f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme du second degré et, pour tout réel x , $f'_m(x) = -2x + 2$. En procédant comme dans la partie 1, on trouve que le réel a est solution de l'équation $0 = (-2a + 2)(-1) - a^2 + 2a + m$, c'est-à-dire

$$-a^2 + 4a + m - 2 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 16 - 4(-1)(m - 2) = 4m + 8$.

Trois cas se présentent :

- si $\Delta < 0$, c'est-à-dire $m < -2$ alors l'équation n'a pas de solution donc il n'existe pas de réel a tel que la tangente en ce point coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $a - 1$.
- si $\Delta = 0$, c'est-à-dire $m = -2$, il existe un seul réel a tel que la tangente en ce point coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $a - 1$.
- si $\Delta > 0$, c'est-à-dire $m > -2$, il existe deux réels a tels que la tangente en chacun de ces points coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $a - 1$.