

Devoir sur table n°1

Mercredi 25 septembre 2024 – 1 heure 50

Exercice 1 : Vrai ou Faux

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

1. La fonction $x \mapsto \cos^2(x)$ est π -périodique sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel x , $(\cos(x) + \sin(x))^2 = 1$.
3. Il existe une unique fonction à la fois paire et impaire sur $\mathbb{R}$.
4. Si T est un nombre réel strictement positif, il existe une fonction T -périodique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Application du cours

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Soit f la fonction $x \mapsto \frac{-x+1}{2x+1}$.
 - (a) Déterminer son ensemble de définition.
 - (b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer une propriété du point $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, que l'on précisera.
 - (c) Démontrer cette propriété.
2. La fonction définie, pour tout $x \in [1; +\infty[$, par $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2-1}$ est-elle dérivable en 1 ?
3. Justifier la dérivabilité puis déterminer la fonction dérivée de la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :
$$g(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$
4. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et impaire. Montrer que f' est une fonction paire.

Exercice 3 : Fonction et trigonométrie

1. Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que, pour tout réel $x \in I$, $u(x) \in J$.

On suppose que u et v sont des fonctions croissantes.

Démontrer **soigneusement** que la fonction $v \circ u$ est croissante.

2. On définit sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction

$$f : x \mapsto \cos(x) \times \sin(x)$$

- (a) Soit $x \in I$. Montrer que $(f(x))^2 = g(\sin(x))$ où $g(x) = -x^4 + x^2$.

- (b) Étudier les variations de g .

- (c) Dédurre des deux questions précédentes le sens de variation de f^2 sur I .

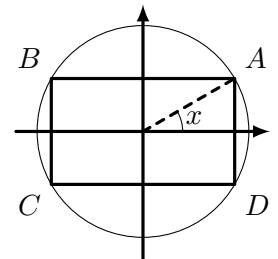
- (d) En déduire le tableau de variations de f sur I .

On pourra utiliser la question 1. ainsi que la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$.

3. On considère un rectangle inscrit dans le cercle trigonométrique, comme sur la figure ci-contre.

Pour quelles dimensions ce rectangle aura-t-il une aire maximale ?

Dans ce cas, quelle est cette aire et que peut-on dire du rectangle ?

**Exercice 4 : Une famille de fonctions****Partie 1 :**

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = -x^2 + 2x + 4$$

1. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.
2. Soit a un réel donné.
 - (a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a .
 - (b) Déterminer les réels a tels que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $a - 1$.

Partie 2 :

Soit $m \in \mathbb{R}$. De manière plus générale, on note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = -x^2 + 2x + m$$

En s'inspirant de la partie 1, déterminer, suivant les valeurs de m , le nombre de réels a tels que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $a - 1$.