

Devoir maison n°6

À rendre lundi 28 avril 2025

Exercice 1 :**Partie A** f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale dont on donnera une équation.

Solution: Pour x au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+1} &= \frac{x(1 - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{1}{x})} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - 0 = 1$ La courbe $\mathcal{C}$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

2. Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.

Solution: La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivable sur $[0; +\infty[$. Calculons sa dérivée. Pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) - \frac{d}{dx}(e^{-x}) \\
 &= \frac{(x+1) \cdot 1 - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} + e^{-x} \\
 &= \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} + e^{-x} \\
 &= \frac{2}{(x+1)^2} + e^{-x}
 \end{aligned}$$

3. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

Solution: Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $(x+1)^2 > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

De plus, $f(0) = \frac{0-1}{0+1} - e^{-0} = -1 - 1 = -2$.

Avec la limite à l'infini calculée dans la question 1, on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-2	$\nearrow$ 1

4. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Solution: Le point de la courbe d'abscisse 0 a pour coordonnées $(0; f(0)) = (0; -2)$.

La pente de la tangente en ce point est donnée par $f'(0)$.

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \frac{2}{(0+1)^2} + e^{-0} \\
 &= 2 + 1 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, c'est-à-dire $y = 3x - 2$.

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1; 2]$. On note u cette solution. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u .

Solution:

- f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $[1; 2] \subset [0; +\infty[$, donc f est dérivable sur $[1; 2]$, et donc f est continue sur $[1; 2]$.
- D'après la question 3, f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc en particulier sur $[1; 2]$.
- Calculons $f(1)$ et $f(2)$:

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1-1}{1+1} - e^{-1} \\ &= 0 - \frac{1}{e} \\ &= -\frac{1}{e} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{2-1}{2+1} - e^{-2} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{e^2} \\ &\approx 0,333 - 0,135 \\ &\approx 0,198 > 0 \end{aligned}$$

On a donc $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$.

Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1; 2]$.

Encadrons maintenant cette solution u avec une amplitude de 10^{-1} . Pour cela, divisons l'intervalle $[1; 2]$ en sous-intervalles de longueur 0,1 et cherchons où la fonction change de signe.

Calculons $f(1,1)$, $f(1,2)$, etc. :

$$f(1,1) = \frac{1,1-1}{1,1+1} - e^{-1,1} \approx 0,048 - 0,333 \approx -0,285 < 0$$

$$f(1, 2) = \frac{1, 2 - 1}{1, 2 + 1} - e^{-1, 2} \approx 0, 091 - 0, 301 \approx -0, 210 < 0$$

$$f(1, 3) = \frac{1, 3 - 1}{1, 3 + 1} - e^{-1, 3} \approx 0, 130 - 0, 273 \approx -0, 143 < 0$$

$$f(1, 4) = \frac{1, 4 - 1}{1, 4 + 1} - e^{-1, 4} \approx 0, 167 - 0, 247 \approx -0, 080 < 0$$

$$f(1, 5) = \frac{1, 5 - 1}{1, 5 + 1} - e^{-1, 5} \approx 0, 200 - 0, 223 \approx -0, 023 < 0$$

$$f(1, 6) = \frac{1, 6 - 1}{1, 6 + 1} - e^{-1, 6} \approx 0, 231 - 0, 202 \approx 0, 029 > 0$$

On a $f(1, 5) < 0$ et $f(1, 6) > 0$, donc $u \in [1, 5; 1, 6]$.

Partie B

n désigne un entier naturel non nul. f_n est la fonction dérivable définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x - n}{x + n} - e^{-x}$$

1. Dresser le tableau de variations de f_n .

Solution: f_n est dérivable sur $[0; +\infty[$ en tant que somme de fonction dérivables sur $[0; +\infty[$. Calculons la dérivée de f_n :

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x - n}{x + n} \right) - \frac{d}{dx} (e^{-x}) \\ &= \frac{(x + n) \cdot 1 - (x - n) \cdot 1}{(x + n)^2} + e^{-x} \\ &= \frac{x + n - x + n}{(x + n)^2} + e^{-x} \\ &= \frac{2n}{(x + n)^2} + e^{-x} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $(x + n)^2 > 0$, $n > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $f'_n(x) > 0$.

La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

De plus, $f_n(0) = \frac{0 - n}{0 + n} - e^{-0} = -1 - 1 = -2$.

Pour x au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\frac{x-n}{x+n} &= \frac{x(1-\frac{n}{x})}{x(1+\frac{n}{x})} \\ &= \frac{1-\frac{n}{x}}{1+\frac{n}{x}}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{n}{x}}{1+\frac{n}{x}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1 - 0 = 1.$$

On peut alors dresser le tableau de variations de f_n :

x	0	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
$f_n(x)$	-2	$\nearrow$ 1

2. (a) Calculer $f_n(n)$. Quel est son signe ?

Solution:

$$\begin{aligned}f_n(n) &= \frac{n-n}{n+n} - e^{-n} \\ &= 0 - e^{-n} \\ &= -e^{-n}\end{aligned}$$

Comme $e^{-n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(n) < 0$.

- (b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{n+1} > 2n + 1$$

Solution: Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété « $e^{n+1} > 2n + 1$ ».

Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie par récurrence sur n .

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $e^{1+1} = e^2 \approx 7,389$ et $2 \cdot 1 + 1 = 3$. Donc $e^2 > 3$, ainsi $\mathcal{P}_n$ est initialisée pour $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \geq 1$, on a $e^{n+1} > 2n + 1$.
 Montrons que $e^{(n+1)+1} > 2(n+1) + 1$, c'est-à-dire $e^{n+2} > 2n + 3$.

On a :

$$\begin{aligned}
 e^{n+2} &= e \cdot e^{n+1} \\
 &> e \cdot (2n + 1) \quad (\text{d'après l'hypothèse de récurrence}) \\
 &> 2,7 \cdot (2n + 1) \quad (\text{car } e > 2,7) \\
 &= 5,4n + 2,7 \\
 &> 2n + 3 \quad (\text{car } 5,4n + 2,7 > 2n + 3 \text{ équivaut à } 3,4n > 0,3, \text{ ce qui est vrai pour } n \geq 1)
 \end{aligned}$$

Conclusion : Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (c) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[n; n+1]$. On note u_n cette solution.

Solution:

- f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $[n; n+1] \subset [0; +\infty[$, donc f est dérivable sur $[n; n+1]$. Donc f est continue sur $[n; n+1]$.
- On sait que f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc en particulier sur $[n; n+1]$.
- On a déjà calculé $f_n(n) = -e^{-n}$ et $f_n(n) < 0$.

Calculons maintenant $f_n(n+1)$:

$$\begin{aligned}
 f_n(n+1) &= \frac{(n+1) - n}{(n+1) + n} - e^{-(n+1)} \\
 &= \frac{1}{2n+1} - e^{-(n+1)} \\
 &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{e^{n+1}}
 \end{aligned}$$

D'après la propriété démontrée au b), on a $e^{n+1} > 2n + 1$, donc $\frac{1}{e^{n+1}} < \frac{1}{2n+1}$.

Par conséquent, $f_n(n+1) = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{e^{n+1}} > 0$.

On a donc $f_n(n) < 0$ et $f_n(n+1) > 0$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[n; n+1]$. On note u_n cette solution.

(d) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n}$

Solution:

- On a $n \leq u_n$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$. Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- On sait que $u_n \in [n; n+1]$, donc $n \leq u_n \leq n+1$.

Par conséquent, $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$.

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = 1$$