

Devoir maison n°6

À rendre lundi 28 avril 2025

Exercice 1 :**Partie A** f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale dont on donnera une équation.
2. Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.
3. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
4. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1; 2]$. On note u cette solution. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u .

Partie B n désigne un entier naturel non nul. f_n est la fonction dérivable définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$$

1. Dresser le tableau de variations de f_n .
2. (a) Calculer $f_n(n)$. Quel est son signe ?
(b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{n+1} > 2n + 1$$

- (c) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[n; n+1]$. On note u_n cette solution.
- (d) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n}$