

Devoir maison n°5

A rendre lundi 3 février 2025

Exercice 1 :Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2x + 3}{x + 4}$ définie sur $[1; 2]$.
 - (a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1; 2]$.
 - (b) En déduire, en utilisant un raisonnement par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < u_n \leq 2.$$

2. (a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(3 + u_n)}{u_n + 4}.$$

- (b) En déduire les variations de (u_n) .
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 1}$.
 - (a) Justifier que le nombre v_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
 - (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n .

Solution:

1. (a) La fonction f est de la forme $f = \frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto 2x + 3$ et $v : x \mapsto x + 4$ sont deux fonctions dérivables sur $[1; 2]$ telles que, pour tout $x \in [1; 2]$, $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$. On en déduit que f est dérivable sur $[1; 2]$ et, pour tout $x \in [1; 2]$,

$$f'(x) = \frac{2 \times (x + 4) - (2x + 3) \times 1}{(x + 4)^2} = \frac{2x + 8 - 2x - 3}{(x + 4)^2} = \frac{5}{(x + 4)^2} > 0.$$

Donc, la fonction f est strictement croissante sur $[1; 2]$.

(b) Soit P_n la proposition dépendant d'un entier n : « $1 < u_n \leq 2$ ».

Initialisation Sachant que $u_0 = 2$, P_0 est vraie.

Hérédité Supposons que P_n soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, $1 < u_n \leq 2$.

Comme f est strictement croissante sur $[1; 2]$, on a donc

$$f(1) < f(u_n) \leq f(2).$$

Or, $f(1) = 1$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(2) = \frac{7}{6} \leq 2$, donc $1 < u_{n+1} \leq \frac{7}{6}$, i.e. P_{n+1} est vraie.

Conclusion P_0 est vraie et $P_n \implies P_{n+1}$. On a ainsi démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n \leq 2$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - u_n = \frac{2u_n + 3 - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - 2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

Or,

$$(1 - u_n)(3 + u_n) = 3 + u_n - 3u_n - u_n^2 = -u_n^2 - 2u_n + 3,$$

donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(3 + u_n)}{u_n + 4}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu dans la question 1.b. que $u_n > 1$, donc $1 - u_n < 0$, $3 + u_n > 0$ et $u_n + 4 > 0$. On déduit alors de la question précédente que $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui prouve que (u_n) est décroissante.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 1}$.

(a) On a vu à la question 1.b. que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$, donc $u_n \neq 1$. Ainsi, le nombre v_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 3}{u_{n+1} - 1} = \frac{2u_n + 3 + 3(u_n + 4)}{2u_n + 3 - (u_n + 4)} = \frac{5u_n + 15}{u_n - 1} = 5 \times \frac{u_n + 3}{u_n - 1},$$

i.e. $v_{n+1} = 5v_n$. Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 5.

(c) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 5^n$. Or, $v_0 = \frac{u_0 + 3}{u_0 - 1} = 5$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 5 \times 5^n = 5^{n+1}$.

Pour finir, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n - 1}$, donc

$$v_n(u_n - 1) = u_{n+1} + 3.$$

Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$, donc $v_n - 1 \neq 0$. Dès lors,

$$u_n = \frac{v_n + 3}{v_n - 1}, \quad \text{i.e.} \quad u_n = \frac{5^{n+1} + 3}{5^{n+1} - 1}.$$

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}.$$

1. Vérifier que les 5 premiers termes de (u_n) sont divisibles par 7.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n + 7 \times 3^{2n+1}.$$

3. Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise u_n .

Solution: On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}.$$

1. On a $u_0 = 7 = 7 \times 1$, $u_1 = 35 = 7 \times 5$, $u_2 = 259 = 7 \times 37$, $u_3 = 2219 = 7 \times 317$ et $u_4 = 19747 = 7 \times 2821$ donc les 5 premiers termes de (u_n) sont divisibles par 7.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} = 3^{2n+3} + 2^{n+3} \\ &= 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} \\ &= 2(3^{2n+1} + 2^{n+1}) + 7 \times 3^{2n+1} \end{aligned}$$

donc

$$u_{n+1} = 2u_n + 7 \times 3^{2n+1}$$

3. Soit la proposition P_n : « 7 divise u_n ».

Initialisation Comme $u_0 = 7 = 7 \times 1$, P_0 est vraie.

Hérédité Supposons P_n vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, 7 divise u_n . Il existe donc un entier K tel que $u_n = 7K$.

Ainsi, par la question précédente,

$$u_{n+1} = 2 \times 7K + 7 \times 3^{2n+1} = 7(2K + 3^{2n+1})$$

Etant donné que $2K + 3^{2n+1}$ est entier, on conclut que 7 divise u_{n+1} i.e. P_{n+1} est vraie.

Conclusion P_0 est vraie et P_n est héréditaire. On a ainsi démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est divisible par 7.

Exercice 3 :

Exercice facultatif, pour les amateurs d'angles

Un bateau se trouve au pied d'une falaise de 600 m, orientée est-ouest. Il prend la mer en suivant le méridien du lieu. On admet que la Terre est une sphère de 6 370 km de rayon. Vous accompagnerez chacune de vos réponses d'un croquis illustrant la situation.

1. Déterminer la hauteur de la partie de la falaise encore visible depuis le bateau lorsque celui-ci a parcouru 80 km.
2. Déterminer la distance minimale à parcourir pour ne plus voir la falaise.