

Devoir maison n°5

A rendre lundi 3 février 2025

Exercice 1 :

Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2x + 3}{x + 4}$ définie sur $[1; 2]$.
 - (a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1; 2]$.
 - (b) En déduire, en utilisant un raisonnement par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < u_n \leq 2.$$

2. (a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(3 + u_n)}{u_n + 4}.$$

- (b) En déduire les variations de (u_n) .
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 1}$.
 - (a) Justifier que le nombre v_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
 - (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n .

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}.$$

1. Vérifier que les 5 premiers termes de (u_n) sont divisibles par 7.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n + 7 \times 3^{2n+1}.$$

3. Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise u_n .

Exercice 3 :**Exercice facultatif, pour les amateurs d'angles**

Un bateau se trouve au pied d'une falaise de 600 m, orientée est-ouest. Il prend la mer en suivant le méridien du lieu. On admet que la Terre est une sphère de 6 370 km de rayon. Vous accompagnerez chacune de vos réponses d'un croquis illustrant la situation.

1. Déterminer la hauteur de la partie de la falaise encore visible depuis le bateau lorsque celui-ci a parcouru 80km.
2. Déterminer la distance minimale à parcourir pour ne plus voir la falaise.