

Devoir maison n°4

À rendre le mercredi 4 décembre 2024

En janvier 2021, Alex se décide d'acheter un scooter coûtant 5 700 euros sans apport personnel. Le vendeur lui propose un crédit à la consommation d'un montant de 5 700 euros, au taux mensuel de 1,5%. Par ailleurs, la mensualité fixée à 300 euros est versée par l'emprunteur à l'organisme de crédit le 25 de chaque mois.

Ainsi, le capital restant dû augmente de 1,5% puis baisse de 300 euros.

Le premier versement a lieu le 25 février 2021.

On note c_n le capital restant dû en euros juste après la n ième mensualité ($n \in \mathbb{N}$).

On convient que $c_0 = 5\,700$.

Les résultats seront donnés sous forme approchée à 0,01 près si nécessaire.

1. Calculer c_1 et c_2 .

Solution: A la fin du mois de février, le capital restant dû est égal au capital emprunté, 5 700 €, augmenté de 1,5% et diminué des 300 € remboursés.

Le coefficient multiplicateur d'une augmentation de 1,5% vaut $1 + \frac{1,5}{100} = 1,015$.
Ainsi, on a :

$$c_1 = 5\,700 \times 1,015 - 300 = 5\,485,5 \text{ €}$$

De même, à la fin du mois de mars,

$$c_2 = 5\,485,5 \times 1,015 - 300 = 5\,267,7825 \approx 5\,267,78 \text{ €}$$

2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = 1,015c_n - 300$. Quelle est la nature de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Solution: A la fin du mois $n+1$, le capital restant dû est égal au capital restant dû à la fin du mois précédent, augmenté de 1,5% puis diminué du montant du remboursement mensuel (300 €) :

$$c_{n+1} = c_n \times 1,015 - 300 \quad \forall n \geq 0$$

3. On considère la suite (v_n) définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = c_n - 20\,000$.

- (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
- (c) Exprimer c_n en fonction de n .

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons v_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= c_{n+1} - 20\,000 = c_n \times 1,015 - 300 - 20\,000 \\ &= 1,015(c_n - 20\,000) + 1,015 \times 20\,000 - 20\,300 \\ &= 1,015(c_n - 20\,000) \\ &= 1,015 v_n \end{aligned}$$

Donc, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,015$.

Son premier terme est :

$$v_0 = c_0 - 20\,000 = 5\,700 - 20\,000 = -14\,300$$

Son terme général admet l'expression explicite :

$$v_n = v_0 \times q^n = -14\,300 \times 1,015^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On en déduit l'expression explicite de c_n :

$$c_n = v_n + 20\,000 = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4. On note i_n les intérêts à verser au n ème mois, pour tout $n \geq 1$.
- (a) Exprimer i_n en fonction de c_{n-1} et en déduire que $i_n = -214,5 \times 1,015^{n-1} + 300$
- (b) Calculer la somme des intérêts versés pour rembourser le prêt.

Solution: Soit $n \geq 1$. Les intérêts à verser au mois n sont égaux à 1,5% du capital restant dû à la fin du mois précédent :

$$\begin{aligned} i_n &= 0,015 \times c_{n-1} \\ &= 0,015 \times (20\,000 - 14\,300 \times 1,015^{n-1}) \\ &= 300 - 214,5 \times 1,015^{n-1}. \end{aligned}$$

Calculons la durée du prêt. A la calculatrice, on établit le tableau des valeurs de c_n . On observe que $c_{22} \approx 157,84$ €. Ceci signifie qu'à la fin du 22^{ème} mois, le capital restant dû n'est plus que de 157,84 €. Le prêt sera totalement remboursé en 23 mois.

Les intérêts à verser au début du 23^{ème} mois ne sont pas calculés avec la formule précédente. On a :

$$i_{23} = 0,015 \times 157,84 = 2,37\text{€}$$

La somme des intérêts versés pendant toute la durée du prêt est égale à :

$$\begin{aligned} S &= 2,37 + \sum_{k=1}^{22} i_k \\ &= \sum_{k=1}^{22} 300 - 214,5 \times 1,015^{k-1} \\ &= 2,37 + \sum_{k=1}^{22} 300 - 214,5 \times \sum_{k=1}^{22} 1,015^{k-1} \\ &= 2,37 + 22 \times 300 - 214,5 \times (1 + 1,015 + \dots + 1,015^{22}) \\ &= 2,37 + 6\,600 - 214,5 \times \frac{1 - 1,015^{22}}{1 - 1,015} \end{aligned}$$

La somme des intérêts versés pendant toute la durée du prêt est $S \approx 1\,060,21$ €

5. Pour aller plus loin, on se place dans le cas général :

on considère que l'on emprunte une somme C_0 à un taux mensuel t avec une mensualité M . Déterminer, en fonction de n , le capital C_n restant dû chaque mois, puis les intérêts I_n pour $n \geq 1$.

Solution: Avec le même raisonnement que pour l'exemple précédent, on trouve que C_n vérifie :

$$C_{n+1} = C_n \times (1 + t) - M \quad \forall n \geq 0$$

On note ℓ la solution de l'équation

$$\ell = \ell \times (1 + t) - M$$

c'est-à-dire

$$\ell = \frac{M}{t}$$

et $V_n = C_n - \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= C_{n+1} - \ell = C_n \times (1 + t) - M - \ell \\ &= (1 + t)(C_n - \ell) + (1 + t)\ell - M - \ell \\ &= (1 + t)(C_n - \ell) + 0 \\ &= (1 + t)V_n \end{aligned}$$

(V_n) est donc une suite géométrique de raison $1 + t$ et de premier terme

$$V_0 = C_0 - \ell = C_0 - \frac{M}{t}.$$

On en déduit l'expression explicite de V_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 \times (1 + t)^n = \left(C_0 - \frac{M}{t}\right) \times (1 + t)^n,$$

puis celle de C_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n = V_n + \ell = \frac{M}{t} + \left(C_0 - \frac{M}{t}\right) \times (1 + t)^n.$$

Les intérêts dûs au début du mois n sont donc donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = t \times C_{n-1} = t \times \left(\frac{M}{t} + \left(C_0 - \frac{M}{t}\right) \times (1 + t)^{n-1}\right)$$

c'est à dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = M + (C_0 t - M) \times (1 + t)^{n-1}}$$