

Devoir maison n°3

À rendre le mercredi 6 novembre 2024

Exercice 1 : La droite de Leonhard Euler

En 1765, le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 - 1783) démontre que :

*« Dans un triangle quelconque,
le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre
et le centre de gravité sont alignés. »*

Le but de l'exercice suivant est, à notre tour, de le démontrer.

On considère un triangle ABC . On note Q le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (c'est-à-dire le point d'intersection des médiatrices) et G le centre de gravité du triangle ABC (c'est-à-dire le point d'intersection des médianes).

Soit H le point défini par $\overrightarrow{QH} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}$.

1. En utilisant la relation de Chasles, montrer que

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

Solution:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QH}) \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= (\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}) \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= (\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}) \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= (\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}) \cdot (\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QC}) \\ &= \overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QC}^2 \\ &= -\overrightarrow{QB}^2 + \overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}^2 \\ &= \overrightarrow{QC}^2 - \overrightarrow{QB}^2 \\ &= QC^2 - QB^2\end{aligned}$$

Or, Q est le point d'intersection des médiatrices, donc en particulier Q est à égale distance de B et de C . Donc $QB = QC$, et ainsi $QC^2 - QB^2 = 0$.

D'où $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

2. On admettra qu'on a de même $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC , c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC .

Solution: On sait que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, donc les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

D'après la remarque introductive à la question, par un raisonnement analogue, les droites (BH) et (CA) sont perpendiculaires, et les droites (CH) et (AB) sont perpendiculaires.

Or, (AH) (respectivement (BH) , respectivement (CH)) est la hauteur du segment $[BC]$ (respectivement $[AC]$, respectivement $[AB]$). Donc le point H est bien l'orthocentre du triangle ABC .

3. En utilisant la définition du point H et la caractérisation vectorielle de G , déduire que $\overrightarrow{QH} = 3\overrightarrow{QG}$. Cette relation est appelée **relation d'Euler**.

Solution: On rappelle la caractérisation vectorielle de G : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
Ainsi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QH} &= \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} \\ &= (\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3\overrightarrow{QG} + \underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{=\vec{0} \text{ par ce qui précède}} \\ &= 3\overrightarrow{QG}\end{aligned}$$

4. Conclure que les points Q , H et G sont alignés, comme l'affirmait Euler.

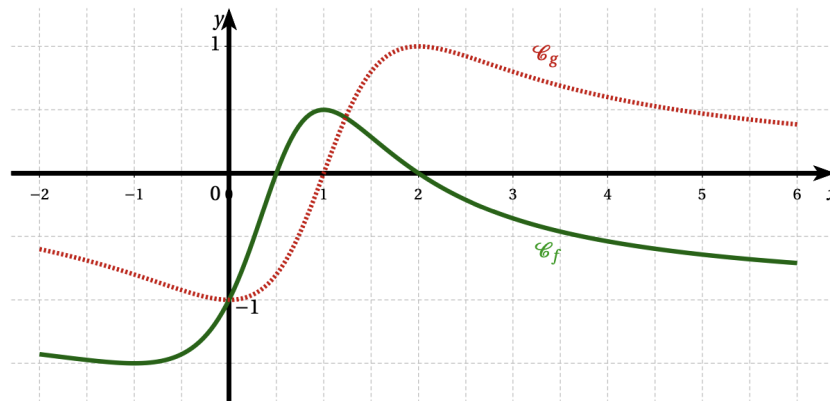
Solution: D'après la question précédente, les vecteurs $\overrightarrow{QH}$ et $\overrightarrow{QG}$ sont colinéaires. Ainsi les points Q , H et G sont alignés.

Exercice 2 : QCM sur les fonctions

Choisir, parmi (a), (b), (c) ou (d), l'unique réponse correcte, en justifiant sur la copie.

f et g sont deux fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $] -2 ; 6[$.

Une représentation graphique est donnée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de f est en trait plein, celle de g est en pointillés.



1. On peut affirmer que :

- (a) $(f \circ g)(2) < (g \circ f)(2)$
- (b) $(f \circ g)(2) > (g \circ f)(2)$
- (c) $(f \circ g)(2) = (g \circ f)(2)$
- (d) On ne peut pas savoir

2. On note h la fonction $g \circ f$. Alors,

- (a) $h'(1) = 0$
- (b) $h'(1) = 1$
- (c) $h'(1) = -1$
- (d) On ne peut pas savoir

3. On peut affirmer que :

- (a) Les antécédents de 0 par la fonction $g \circ f$ sont $\frac{1}{2}$ et 2.
- (b) 1 est l'unique antécédent de 0 par $g \circ f$
- (c) Les antécédents de 0 par la fonction $g \circ f$ sont $\frac{1}{2}$, 1 et 2.
- (d) 0 ne possède pas d'antécédent par la fonction $g \circ f$.

4. Sur l'intervalle $]2 ; 6[$, la fonction $g \circ f$

- (a) est strictement décroissante
- (b) est strictement croissante
- (c) est constante
- (d) change de sens de variation

Solution:

1. On a

$$\begin{aligned} f \circ g(2) &= f(g(2)) \\ &= f(1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} g \circ f(2) &= g(f(2)) \\ &= g(0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{2} > -1$, donc $f \circ g(2) > g \circ f(2)$. La réponse b est la réponse correcte

2. $g \circ f$ est dérivable sur $] -2; 6[$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $] -2; 6[$. Ainsi

$$\forall x \in] -2; 6[, g \circ f'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

On obtient

$$g \circ f'(1) = f'(1) \times g'(f(1))$$

On conjecture graphiquement que f admet un maximum en 1. Alors $f'(1) = 0$.

Finalement

$$\begin{aligned} g \circ f'(1) &= f'(1) \times g'(f(1)) \\ &= 0 \times g'(f(1)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi la réponse a est correcte

3. Supposons par l'absurde qu'il existe $a \in]-2; 6[$ tel que $g \circ f(a) = 0$.

$$\begin{aligned} g \circ f(a) = 0 &\iff g(f(a)) = 0 \\ &\iff f(a) = 1 \text{ (résolution graphique)} \end{aligned}$$

Or, graphiquement : $\forall x \in]-2; 6[, f(x) = -1$. D'où contradiction. Ainsi la conjecture de départ est fausse et il existe pas d'antécédent à 0 par $g \circ f$. C'est donc la réponse d qui est correcte.

4. Graphiquement, g et f sont strictement décroissantes sur $]-2; 6[$.

Or, la composée de deux fonctions strictement décroissantes sur $]-2; 6[$ est une strictement croissante sur $]-2; 6[$. Ainsi la réponse b est correcte.

Exercice 3 : La suite de Léonard de Pise

Léonard de Pise (vers 1175-1250), dit Fibonacci, est un mathématicien italien qui vécut en Afrique du Nord où son père faisait du commerce. On lui doit l'introduction en Europe des chiffres arabes (qui sont indiens à l'origine).

Dans un de ses ouvrages (appelé *Liber abaci*), il pose le problème suivant :

« Quelqu'un a déposé un couple de lapins dans un certain lieu, clos de toutes parts, pour savoir combien de couples seraient issus de cette paire en une année, car il est dans leur nature de générer un autre couple en un seul mois, et qu'ils enfantent dans le second mois après leur naissance. »

On définit la suite $(F_n)_{n \geq 1}$ de sorte que F_n est le nombre de paires de lapins dans ce lieu clos au n -ième mois. Dans cette population idéale, on suppose que :

- Au début du premier mois, il y a juste une paire de lapins nouveaux nés ;
- Les lapins ne peuvent procréer qu'après deux mois d'existence ;
- Chaque début de mois, toute paire susceptible de procréer engendre exactement une nouvelle paire de lapereaux ;
- Les lapins ne meurent jamais.

1. Quelles sont les valeurs de F_1 , F_2 , F_3 et F_4 . Justifier les réponses.

Solution:

- $F_1 = 1$, car au début du premier mois, il y a juste 1 paire de lapins nouveaux-nés.
- $F_2 = 1$, car les lapins grandissent et ne peuvent procréer qu'après deux mois d'existence.
- $F_3 = 2$, car il y a la paire de lapins déjà présente et la paire de lapins nouvellement née.
- $F_4 = 3$, car il y a la paire de lapins présente au départ qui engendre une nouvelle paire de lapins, et les lapins nés à l'étape précédente qui grandissent et ne peuvent pas encore procréer.

2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Solution: Soit n un entier naturel. On se place au mois n . On cherche à exprimer le nombre de paires de lapins deux mois plus tard, donc au mois $n+2$: les F_{n+2} couples de lapins sont formés des F_{n+1} couples du mois précédent et des couples nouvellement engendrés.

Or, seuls les couples en âge de procréer engendrent un nouveau couple au mois $n+2$ que les couples pubères, c'est-à-dire ceux qui existaient déjà deux mois auparavant, qui sont en nombre F_n . On a donc, pour tout entier n strictement positif :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

3. Calculer F_{12} .

Solution: D'après la question précédente, la suite (F_n) est définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ \forall n \geq 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Ainsi

- $F_3 = 1 + 1 = 2$ (cohérent)
- $F_4 = 1 + 2 = 3$ (cohérent)
- $F_5 = 2 + 3 = 5$
- $F_6 = 3 + 5 = 8$
- $F_7 = 5 + 8 = 13$
- $F_8 = 8 + 13 = 21$
- $F_9 = 13 + 21 = 34$
- $F_{10} = 21 + 34 = 55$
- $F_{11} = 34 + 55 = 89$
- $F_{12} = 55 + 89 = 144$

4. On peut démontrer la formule suivante, qui pour l'instant restera une « formule magique » :

$$\forall n \geq 1, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Vérifier cette formule dans les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 4$.

Solution:

- Pour $n = 1$,

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5} - (1 - \sqrt{5})}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2\sqrt{5}}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Pour $n = 2$,

$$\begin{aligned}
 F_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times 1 \times \frac{2\sqrt{5}}{2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

- Pour $n = 4$,

$$\begin{aligned}
 F_4 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^4 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^4 \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{(1+\sqrt{5})^2 + (1-\sqrt{5})^2}{4} \right) \left(1 \times \frac{2\sqrt{5}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5+1-2\sqrt{5}+5}{4} \right) \times \sqrt{5} \\
 &= \frac{12}{4} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$