

Devoir maison n°3

À rendre le mercredi 6 novembre 2024

Exercice 1 : La droite de Leonhard Euler

En 1765, le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 - 1783) démontre que :

*« Dans un triangle quelconque,
le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre
et le centre de gravité sont alignés. »*

Le but de l'exercice suivant est, à notre tour, de le démontrer.

On considère un triangle ABC . On note Q le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (c'est-à-dire le point d'intersection des médiatrices) et G le centre de gravité du triangle ABC (c'est-à-dire le point d'intersection des médianes).

Soit H le point défini par $\overrightarrow{QH} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}$.

1. En utilisant la relation de Chasles, montrer que

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

2. On admettra qu'on a de même $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC , c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC .

3. En utilisant la définition du point H et la caractérisation vectorielle de G , déduire que $\overrightarrow{QH} = 3\overrightarrow{QG}$. Cette relation est appelée **relation d'Euler**.

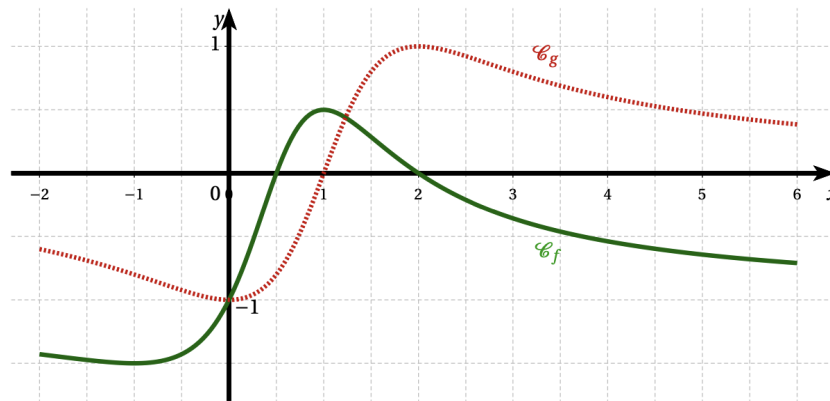
4. Conclure que les points Q , H et G sont alignés, comme l'affirmait Euler.

Exercice 2 : QCM sur les fonctions

Choisir, parmi (a), (b), (c) ou (d), l'unique réponse correcte, en justifiant sur la copie.

f et g sont deux fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $] -2 ; 6[$.

Une représentation graphique est donnée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de f est en trait plein, celle de g est en pointillés.



1. On peut affirmer que :

- (a) $(f \circ g)(2) < (g \circ f)(2)$
- (b) $(f \circ g)(2) > (g \circ f)(2)$
- (c) $(f \circ g)(2) = (g \circ f)(2)$
- (d) On ne peut pas savoir

2. On note h la fonction $g \circ f$. Alors,

- (a) $h'(1) = 0$
- (b) $h'(1) = 1$
- (c) $h'(1) = -1$
- (d) On ne peut pas savoir

3. On peut affirmer que :

- (a) Les antécédents de 0 par la fonction $g \circ f$ sont $\frac{1}{2}$ et 2.
- (b) 1 est l'unique antécédent de 0 par $g \circ f$
- (c) Les antécédents de 0 par la fonction $g \circ f$ sont $\frac{1}{2}$, 1 et 2.
- (d) 0 ne possède pas d'antécédent par la fonction $g \circ f$.

4. Sur l'intervalle $]2 ; 6[$, la fonction $g \circ f$

- (a) est strictement décroissante
- (b) est strictement croissante
- (c) est constante
- (d) change de sens de variation

Exercice 3 : La suite de Léonard de Pise

Léonard de Pise (vers 1175-1250), dit Fibonacci, est un mathématicien italien qui vécut en Afrique du Nord où son père faisait du commerce. On lui doit l'introduction en Europe des chiffres arabes (qui sont indiens à l'origine).

Dans un de ses ouvrages (appelé *Liber abaci*), il pose le problème suivant :

« *Quelqu'un a déposé un couple de lapins dans un certain lieu, clos de toutes parts, pour savoir combien de couples seraient issus de cette paire en une année, car il est dans leur nature de générer un autre couple en un seul mois, et qu'ils enfantent dans le second mois après leur naissance.* »

On définit la suite $(F_n)_{n \geq 1}$ de sorte que F_n est le nombre de paires de lapins dans ce lieu clos au n -ième mois. Dans cette population idéale, on suppose que :

- Au début du premier mois, il y a juste une paire de lapins nouveaux nés ;
 - Les lapins ne peuvent procréer qu'après deux mois d'existence ;
 - Chaque début de mois, toute paire susceptible de procréer engendre exactement une nouvelle paire de lapereaux ;
 - Les lapins ne meurent jamais.
1. Quelles sont les valeurs de F_1 , F_2 , F_3 et F_4 . Justifier les réponses.
 2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
 3. Calculer F_{12} .
 4. On peut démontrer la formule suivante, qui pour l'instant restera une « formule magique » :

$$\forall n \geq 1, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Vérifier cette formule dans les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 4$.