

Devoir maison n°2

À rendre le mercredi 9 octobre 2024

Exercice 1 : Une inégalité de convexité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (1+x)^n$$

1. Étudier la convexité de f sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer à l'aide d'un argument de convexité que, pour tout $x \geq 0$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Solution:

1. On note f la fonction $x \mapsto (1+x)^n$.

f est une fonction polynôme donc deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$.

On a, pour tout $x \in [0; +\infty[$,

- $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$
- $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$

Soit $x \geq 0$. On a $(1+x)^{n-1} > 0$ et donc $f''(x) \geq 0$.

Ainsi, f est convexe sur $[0; +\infty[$.

2. Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f sur $[0; +\infty[$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée $\mathcal{T}_0$, a pour équation :

$$\mathcal{T}_0 : y = f(0) + f'(0)(x-0)$$

On a $f(0) = 1$ et $f'(0) = n$. D'où, $\mathcal{T}_0 : y = 1 + n(x-0)$, c'est-à-dire

$$\mathcal{T}_0 : y = 1 + nx$$

f est convexe sur $[0; +\infty[$, ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier de $\mathcal{T}_0$. Ainsi, on a bien, pour tout $x \geq 0$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Exercice 2 : Positions relatives de courbes et trigonométrie

Dans cet exercice, on utilisera (sans la redémontrer) l'inégalité :

$$\text{pour tout } x \text{ réel positif ou nul, } \sin x \leq x. \quad (*)$$

1. Soit x un réel positif ou nul. Établir successivement les inégalités suivantes, à l'aide d'études de variations de fonctions bien choisies :
 - (a) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$
 - (b) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$
 - (c) $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$
2. En déduire, pour x réel positif ou nul, un encadrement :
 - (a) de $\cos x$ par deux polynômes,
 - (b) de $\sin x$ par deux polynômes.
3. Donner alors un minorant et un majorant de $\cos(0,5)$ et de $\sin(0,5)$.

Solution:

1. (a) On note f la fonction : $x \mapsto \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

On sait que :

- la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$,
- la fonction polynôme $x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

En tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\sin x + x.$$

D'après (*), $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

Ainsi, f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Par conséquent, pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq f(0)$, c'est-à-dire $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq f(0)$, ou encore $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}} \quad (1)$$

(b) On note g la fonction $x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6}$.

On sait que :

- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$,
- la fonction polynôme $x \mapsto -x + \frac{x^3}{6}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

En tant que somme de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

On reconnaît la fonction f . D'où, d'après (1), $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. Ainsi, g est croissante sur $[0; +\infty[$.

Par conséquent, pour tout $x \geq 0$, on a $g(x) \geq g(0)$,

c'est-à-dire $\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq g(0)$, ou encore $\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$, ou encore

$$\boxed{\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}} \quad (2)$$

(c) On note h la fonction $x \mapsto \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$.

h est la somme de f et de la fonction polynôme $x \mapsto -\frac{x^4}{24}$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{6}$$

On reconnaît la fonction $-g$ et d'après (2), $h'(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$. Ainsi, h est décroissante sur $[0; +\infty[$.

Par conséquent, pour tout $x \geq 0$, on a $h(x) \leq h(0)$, c'est-à-dire :

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leq h(0)$$

ou encore

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leq 0$$

ou encore :

$$\boxed{\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}.$$

(d) On déduit des inégalités montrées à la question précédente et de l'inégalité (*) que, pour tout réel positif ou nul x , on a :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x \quad (3)$$

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad (4)$$

2. En écrivant les inégalités précédentes pour $x = 0,5$ qui est bien un réel positif, on obtient les encadrements suivants de $\sin(0,5)$ et $\cos(0,5)$:

$$\frac{23}{48} \leq \sin(0,5) \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{7}{8} \leq \cos(0,5) \leq \frac{337}{384}.$$

On en déduit ensuite, en prenant les valeurs approchées au millième par défaut de $\frac{23}{48}$ et par excès de $\frac{337}{384}$:

$$0,479 \leq \sin \frac{1}{2} \leq 0,5 \text{ et } 0,875 \leq \cos \frac{1}{2} \leq 0,878$$

Exercice 3 : Une propriété des fonctions convexes (facultatif)

Soient f une fonction convexe définie sur $\mathbb{R}$ et a et b deux réels, avec $a < b$.

Le but de l'exercice est de montrer que, pour tout x réel tel que $a < x < b$, on a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \quad (**)$$

On note A , B et M les points de la courbe représentative de f , notée $\mathcal{C}_f$, d'abscisses respectives a , b et x .

1. Un cas particulier

Dans cette question, on considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et on choisit $a = -1$, $b = 3$ et $x = 2$.

- Représenter sur l'annexe la courbe $\mathcal{C}_f$ (on choisira une unité de longueur égale à 1 cm sur chaque axe)
- Calculer les coordonnées des points A , B et M et les placer sur la figure. Tracer (AB) , (AM) et (BM) .
- Vérifier (sur cet exemple) que l'inégalité $(**)$ est vraie et interpréter graphiquement cette relation.

2. Cas général

- Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) en fonction de a et de b .
- Soit x un réel quelconque, tel que $a < x < b$. Montrer, en utilisant la convexité de f , que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Montrer, de la même façon, que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

3. Une application : démontrer que la dérivée d'une fonction convexe dérivable est croissante

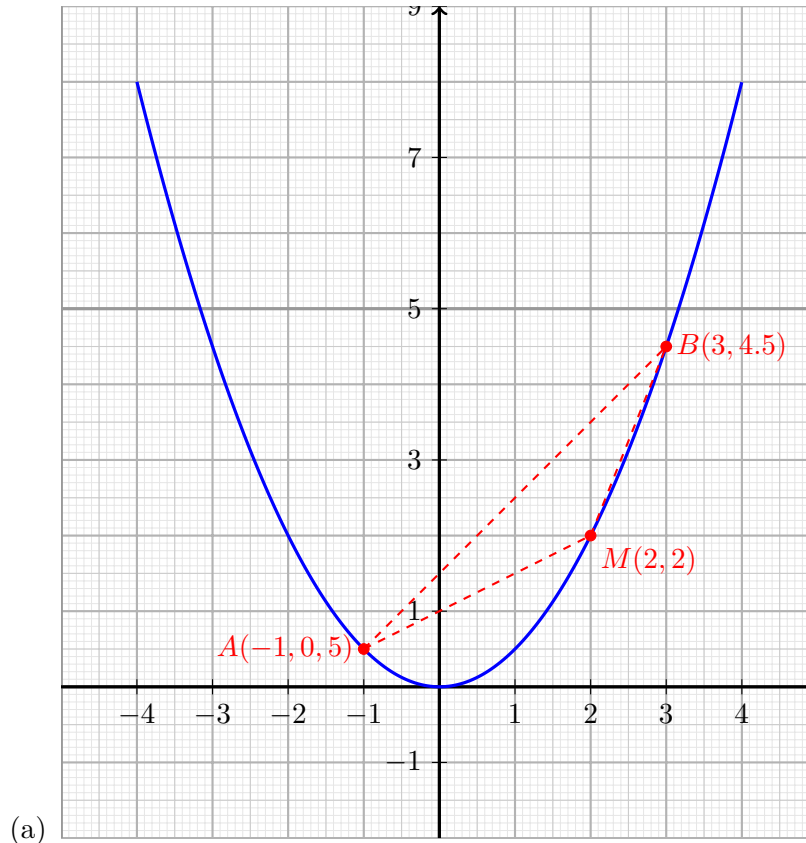
On suppose maintenant que f est convexe et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Quelle est la limite de $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ quand x tend vers a ?
Quelle est la limite de $\frac{f(b) - f(x)}{b - x}$ quand x tend vers b ?

- On admet que l'inégalité $(**)$ a pour conséquence l'inégalité suivante :

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

Que peut-on conclure sur le sens de variations de f' ?

Solution:**1. Cas particulier**

(b) Le point A a pour abscisse 1 et pour ordonnée $\frac{(-1)^2}{2} = 0,5$.

Le point B a pour abscisse 3 et pour ordonnée $\frac{3^2}{2} = 4,5$.

Le point M a pour abscisse 2 et pour ordonnée $\frac{2^2}{2} = 2$.

(c) L'inégalité $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$ affirme que le coefficient directeur de la droite (AM) est inférieure à celui de la droite (AB) qui est inférieur à celui de la droite (MB) .

2. Cas général

(a) L'équation réduite de (AB) est

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

- (b) f est convexe donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de toutes ses cordes. En particulier, pour tout x tel que $a < x < b$, on a

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

c'est-à-dire

$$f(x) - f(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

puis, en divisant les deux membres de l'inégalité par $x - a$, nombre strictement positif :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- (c) De même, on peut réécrire l'équation de (AB) sous la forme

$$y = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - b) + f(b)$$

En utilisant la convexité de f , on obtient : pour tout x tel que $a < x < b$

$$f(x) \leq \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - b) + f(b)$$

c'est-à-dire

$$f(x) - f(b) \leq \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - b)$$

puis en divisant les deux membres de l'inégalité $x - b$, nombre strictement négatif :

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

3. Application

- (a) On a

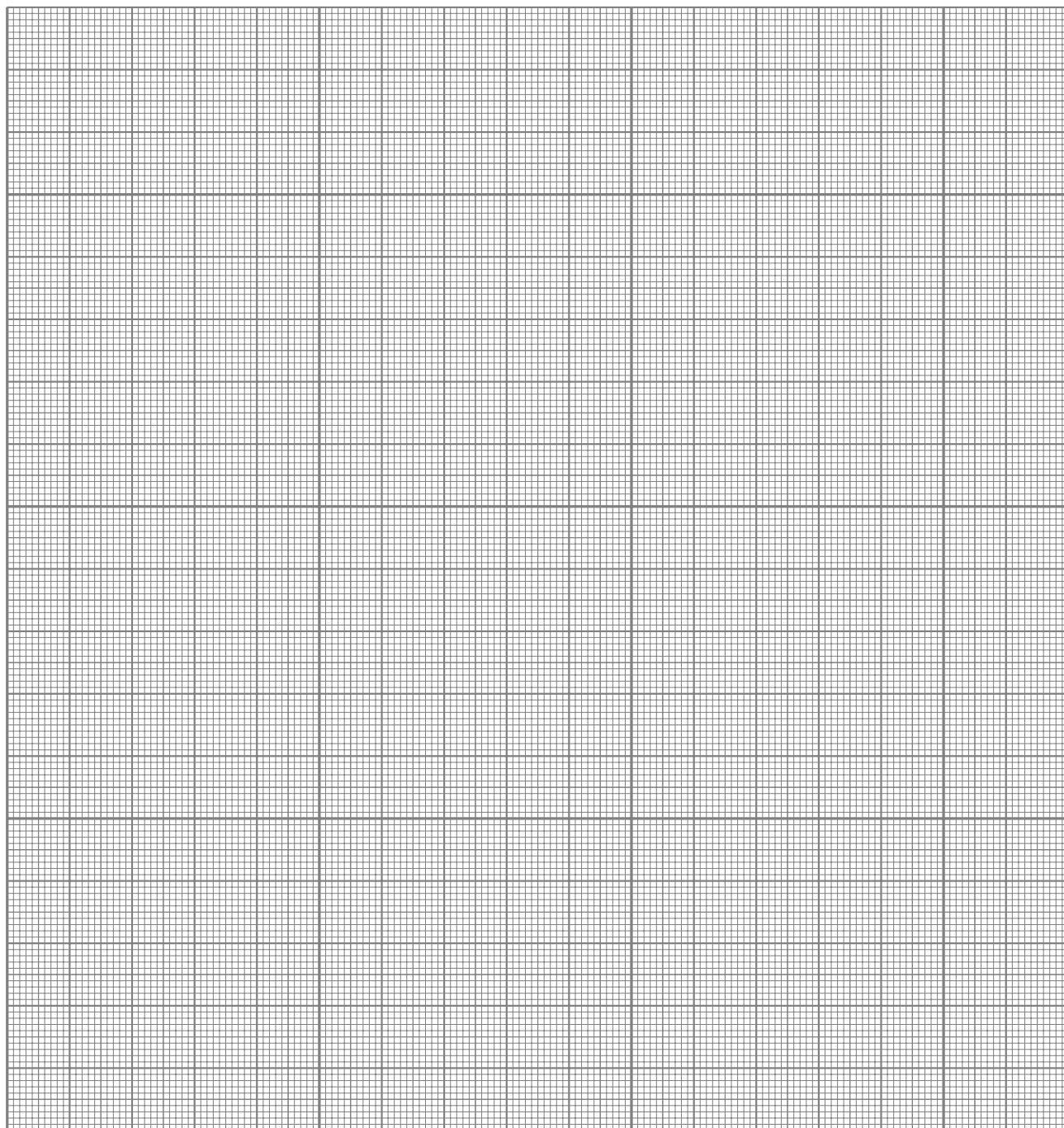
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \text{ et } \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(b)$$

- (b) On a, pour tout réel a et b avec $a < b$,

$$f'(a) \leq \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq f'(b),$$

d'où, en particulier $f'(a) \leq f'(b)$, ce qui signifie que f' est croissante.

ANNEXE :



NOM ET PRÉNOM