

Devoir maison n°2

À rendre le mercredi 9 octobre 2024

Exercice 1 : Une inégalité de convexité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (1+x)^n$$

1. Étudier la convexité de f sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer à l'aide d'un argument de convexité que, pour tout $x \geq 0$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Exercice 2 : Positions relatives de courbes et trigonométrie

Dans cet exercice, on utilisera (sans la redémontrer) l'inégalité :

$$\text{pour tout } x \text{ réel positif ou nul, } \sin x \leq x. \quad (*)$$

1. Soit x un réel positif ou nul. Établir successivement les inégalités suivantes, à l'aide d'études de variations de fonctions bien choisies :
 - (a) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$
 - (b) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$
 - (c) $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$
2. En déduire, pour x réel positif ou nul, un encadrement :
 - (a) de $\cos x$ par deux polynômes,
 - (b) de $\sin x$ par deux polynômes.
3. Donner alors un minorant et un majorant de $\cos(0,5)$ et de $\sin(0,5)$.

Exercice 3 : Une propriété des fonctions convexes (facultatif)

Soient f une fonction convexe définie sur $\mathbb{R}$ et a et b deux réels, avec $a < b$.

Le but de l'exercice est de montrer que, pour tout x réel tel que $a < x < b$, on a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \quad (**)$$

On note A , B et M les points de la courbe représentative de f , notée $\mathcal{C}_f$, d'abscisses respectives a , b et x .

1. Un cas particulier

Dans cette question, on considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et on choisit $a = -1$, $b = 3$ et $x = 2$.

- Représenter sur l'annexe la courbe $\mathcal{C}_f$ (on choisira une unité de longueur égale à 1 cm sur chaque axe)
- Calculer les coordonnées des points A , B et M et les placer sur la figure. Tracer (AB) , (AM) et (BM) .
- Vérifier (sur cet exemple) que l'inégalité $(**)$ est vraie et interpréter graphiquement cette relation.

2. Cas général

- Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) en fonction de a et de b .
- Soit x un réel quelconque, tel que $a < x < b$. Montrer, en utilisant la convexité de f , que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Montrer, de la même façon, que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

3. Une application : démontrer que la dérivée d'une fonction convexe dérivable est croissante

On suppose maintenant que f est convexe et dérivable sur $\mathbb{R}$.

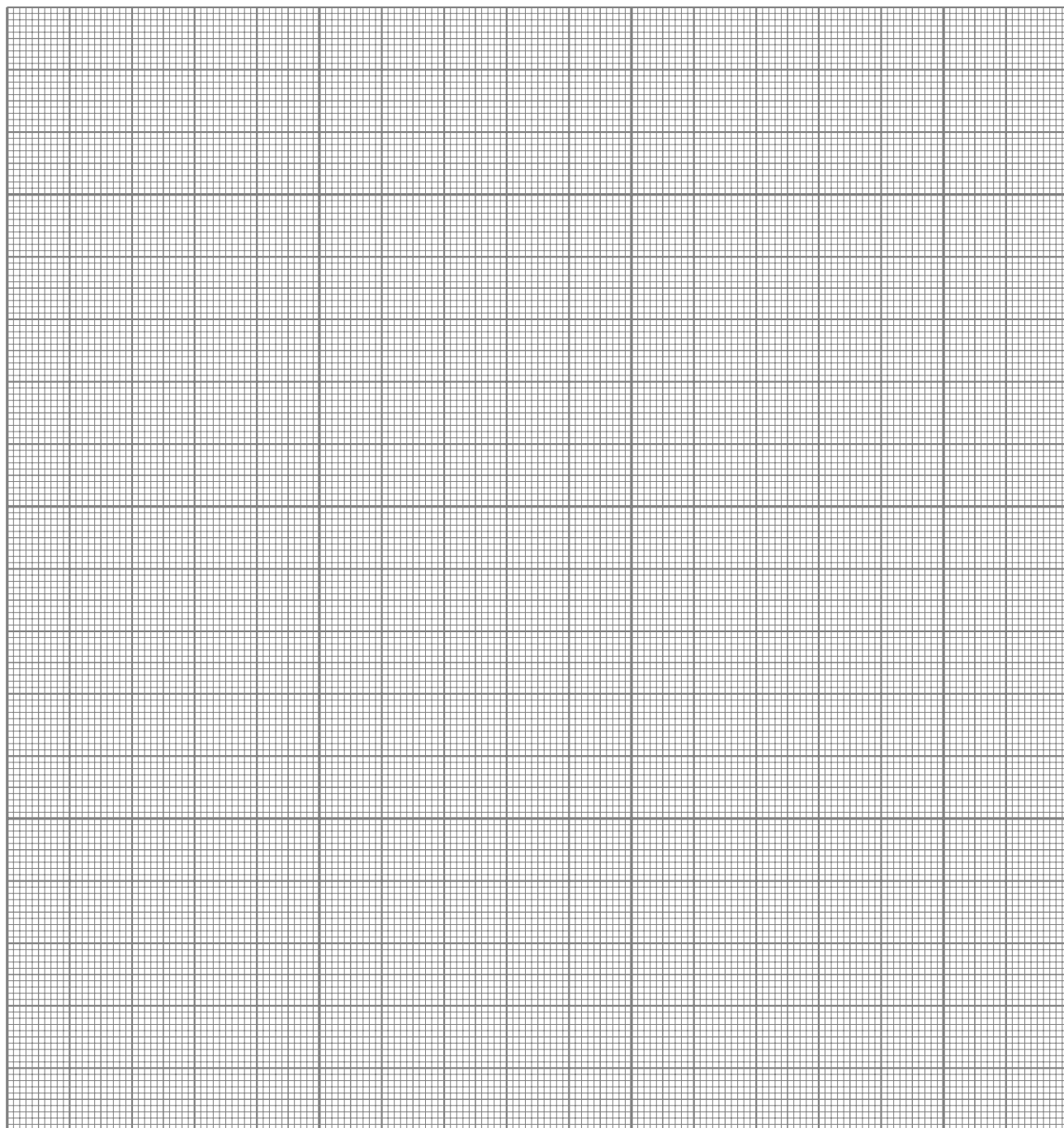
- Quelle est la limite de $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ quand x tend vers a ?
Quelle est la limite de $\frac{f(b) - f(x)}{b - x}$ quand x tend vers b ?

- On admet que l'inégalité $(**)$ a pour conséquence l'inégalité suivante :

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

Que peut-on conclure sur le sens de variations de f' ?

ANNEXE :



NOM ET PRÉNOM