

Devoir maison n°1

À rendre le lundi 16 septembre 2024

Exercice 1 : Fonctions et trigonométrieOn considère la fonction f définie par

$$f(x) = (\tan x)^2 + \cos x$$

et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Quel est l'ensemble de définition de f ? On le notera $\mathcal{D}$ par la suite.
(b) Montrer que f est périodique de période 2π .
(c) Étudier la parité de f .
2. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$, puis calculer sa dérivée.
(b) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} (2 - \cos^3 x)$$

- (c) Étudier le signe de f' sur $J = \left[0; \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$.
- (d) Dresser le tableau de variations de f sur J .
3. (a) Tracer sur l'annexe la courbe $\mathcal{C}$ sur J .
(b) Sur la même figure, compléter le tracé de $\mathcal{C}$ entre $-\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ sans calculs supplémentaires.
Quelle(s) propriété(s) géométrique(s) de $\mathcal{C}$ utilisez-vous ici ?

Exercice 2 : Maximum ou majorant ?On note f la fonction définie sur $] -2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b , à déterminer, tels que

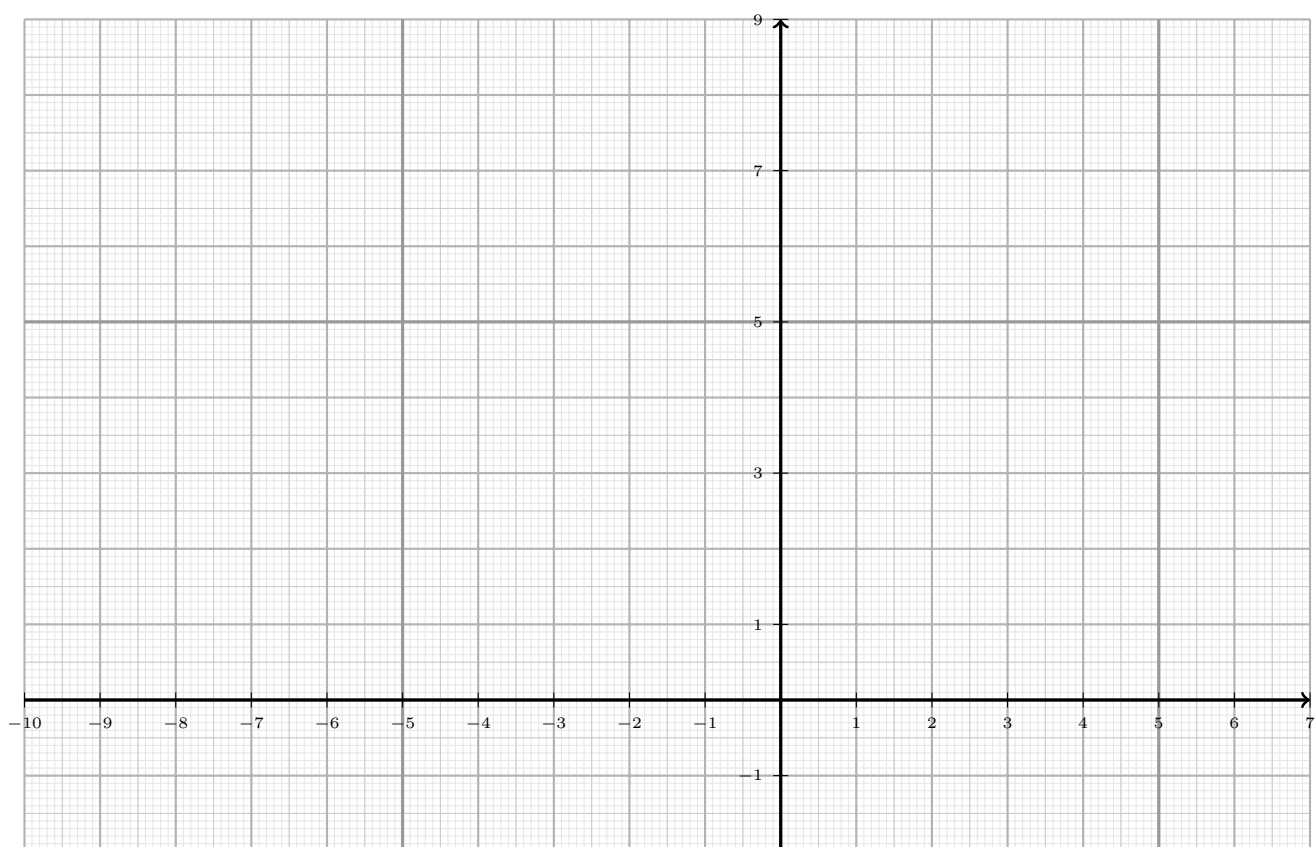
$$\forall x \in] -2; +\infty[, f(x) = a + \frac{b}{x + 2}$$

2. Déterminer les variations de f sur $] -2; +\infty[$
3. Démontrer que

$$\forall x \in] -2; +\infty[, f(x) < 2$$

4. Démontrer que f n'admet pas de maximum sur $] -2; +\infty[$. Justifier avec soin.

ANNEXE :



NOM ET PRÉNOM

1. (a) **Ensemble de définition de f .**

f est définie si et seulement si la fonction tangente est définie
si et seulement si la fonction cosinus ne s'annule pas

Or, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ est :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(b) **Périodicité de f .**

Commençons par remarquer que, quel que soit $x \in \mathcal{D}$, $x + 2\pi \in \mathcal{D}$.

On sait que les fonctions tangente et cosinus sont 2π -périodiques, c'est-à-dire, pour tout réel x tel que ces égalités ont un sens,

$$\tan(x + 2\pi) = \tan(x) \quad \text{et} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= (\tan(x + 2\pi))^2 + \cos(x + 2\pi) \\ &= (\tan(x))^2 + \cos(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ainsi, f est périodique de période 2π .

(c) **Parité de f .**

Commençons par remarquer que $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0.

Soit $x \in \mathcal{D}$. Calculons $f(-x)$:

$$f(-x) = (\tan(-x))^2 + \cos(-x).$$

Or :

$$\tan(-x) = -\tan(x) \quad \text{et} \quad \cos(-x) = \cos(x),$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-\tan(x))^2 + \cos(x) \\ &= (\tan(x))^2 + \cos(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc f est une fonction paire.

2. (a) **Dérivabilité de f .**

On sait que la fonction tangente est dérivable sur $\mathcal{D}$ et que la fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \tan^2(x)$ composée de la fonction tangente par la fonction carré est donc dérivable sur $\mathcal{D}$.

De plus, la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathcal{D}$ en tant que somme de fonctions dérivables.

(b) **Calcul de la dérivée.**

Notons $f = u + v$, avec, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $u(x) = \tan^2(x)$ et $v(x) = \cos(x)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} u'(x) &= 2 \tan'(x) \times \tan(x) \\ &= 2 \times \frac{1}{\cos^2(x)} \times \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \frac{2 \sin(x)}{\cos^3(x)} \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}, f'(x) &= \frac{2 \sin(x)}{\cos^3(x)} - \sin(x) \\ &= \sin(x) \left(\frac{2}{\cos^3(x)} - 1 \right) \\ &= \sin(x) \left(\frac{2 - \cos^3(x)}{\cos^3(x)} \right) \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} (2 - \cos^3(x)). \end{aligned}$$

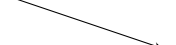
ce qu'il fallait démontrer.

(c) **Étude du signe de f' sur J .**

L'ensemble J est la réunion de deux intervalles : $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. On doit donc étudier le signe de f' sur chacun de ces intervalles.

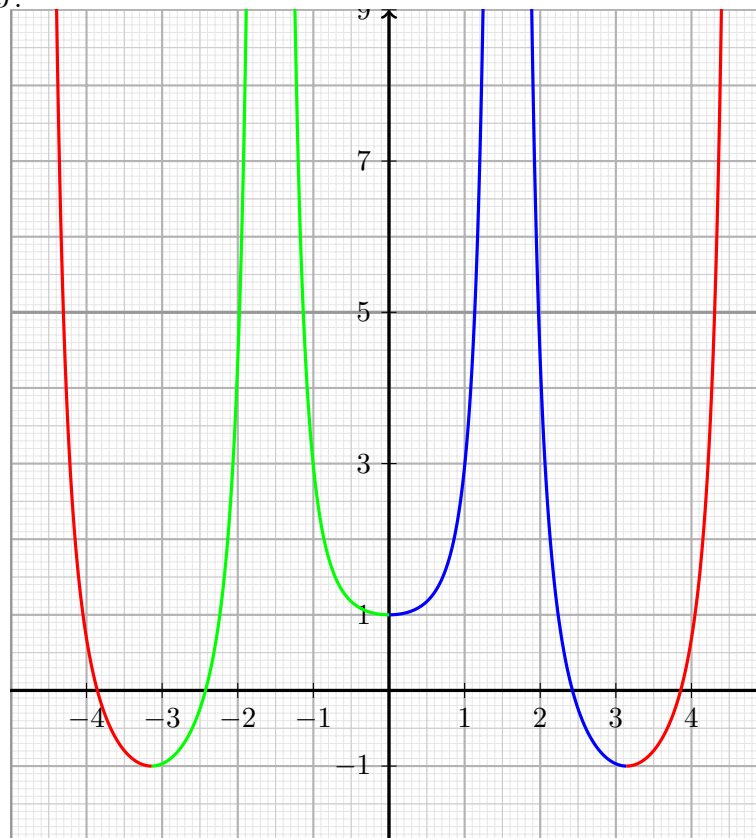
- Pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(x) > 0$ et $\sin(x) \geq 0$. Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $2 - \cos^3(x)$. Comme $0 \leq \cos(x) \leq 1$, on peut affirmer que $2 - \cos^3(x) > 0$. Donc, $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.
- Pour $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, on a $\cos(x) < 0$ et $\sin(x) \geq 0$. $\cos^3(x)$ est négatif et $2 - \cos^3(x) > 2$ pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, donc f' est négative sur cet intervalle.

(d) **Tableau de variations de f sur J .**

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $f'(x)$	+		-
Variations de f	1 		 -1

3. (a) **Représentation graphique**

On trace ci-dessous la courbe **bleue** représentation graphique de la fonction f sur J .



(b) **Propriétés utilisées**

- On utilise d'abord la parité de la fonction f , et on complète le tracé de la courbe sur $\left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. On complète le tracé de la courbe avec la partie **verte**.
- La fonction f étant 2π -périodique, on étend sa représentation graphique par 2π -périodicité. On obtient ainsi la partie **rouge** de la courbe.

Exercice n° 2

1. Nous voulons montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in]-2; +\infty[, f(x) = \frac{2x-1}{x+2} = a + \frac{b}{x+2}.$$

Soit $x \in]-2; +\infty[$. Commençons par écrire les deux termes du membre de droite au même dénominateur. On obtient :

$$\begin{aligned} a + \frac{b}{x+2} &= \frac{a(x+2)}{x+2} + \frac{b}{x+2} \\ &= \frac{a(x+2) + b}{x+2} \\ &= \frac{ax + 2a + b}{x+2} \end{aligned}$$

Or, nous savons que

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2}.$$

On peut ainsi identifier les coefficients du numérateur :

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$

En remplaçant a par 2 dans la deuxième équation, on obtient :

$$2 \times 2 + b = -1 \quad \text{donc} \quad 4 + b = -1 \quad \text{donc} \quad b = -5$$

Les réels a et b sont donc :

$$a = 2 \quad \text{et} \quad b = -5.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-2; +\infty[$,

$$f(x) = 2 - \frac{5}{x+2}.$$

2. Étude des variations de f sur $] -2; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $] -2; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $] -2; +\infty[$, et dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

On va dériver f grâce à l'expression trouvée à la question précédente.

$$\forall x \in] -2; +\infty[, f'(x) = 0 + \frac{5}{(x+2)^2}$$

Quel que soit $x \in] -2; +\infty[$, $f'(x) > 0$ ce qui signifie que la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

3. Montrons que $f(x) < 2$ pour tout $x \in] -2; +\infty[$.

Soit $x \in] -2; +\infty[$. On sait que

$$f(x) = 2 - \frac{5}{x+2}.$$

Le terme $\frac{5}{x+2}$ est strictement positif pour tout $x \in] -2; +\infty[$, car $x+2 > 0$ sur cet intervalle.

Ainsi, $2 - \frac{5}{x+2} < 2$, et donc $f(x) < 2$ et ceci quel que soit $x \in] -2; +\infty[$.

4. Montrons que f n'admet pas de maximum sur $] -2; +\infty[$.

Supposons par l'absurde que f admet un maximum sur $] -2; +\infty[$. Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in] -2; +\infty[$, $f(x) \leq M$. De plus, comme M est un maximum, il existe un réel $x_0 \in] -2; +\infty[$ tel que $f(x_0) = M$.

Notons y_0 un réel de l'intervalle $] -2; +\infty[$ strictement supérieur à x_0 . D'après la question 2, f est strictement croissante, donc $f(y_0) > f(x_0)$. Ainsi $f(y_0) > M$. Cela contredit l'hypothèse qui affirme que

$$\forall x \in] -2; +\infty[, f(x) \leq M$$

D'où contradiction. Ainsi la fonction f n'admet pas de maximum sur $] -2; +\infty[$.