

Séquence XIV – Matrices



Exercice 1

Déterminer les matrices $n \times p$ notées $(a_{i,j})$ telles que, pour tous entiers i compris entre 1 et n et j compris entre 1 et p , on a :

1. $n = 3, p = 4$ et $a_{i,j} = i + j$

2. $n = 4, p = 3$ et $a_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$
et $a_{i,j} = 0$ sinon

3. $n = 3, p = 3$ et $a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i = j \\ 2i & \text{si } i < j \\ i - j & \text{si } i > j \end{cases}$

4. $n = 4, p = 4$ et $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ i + 1 & \text{si } i < j \\ j - 2 & \text{si } i > j \end{cases}$

Solution de l'exercice 1

Nous allons déterminer les matrices demandées dans chaque cas :

1. Pour $n = 3, p = 4$ et $a_{i,j} = i + j$:

Calculons les éléments de la matrice $A = (a_{i,j})$:

$$a_{1,1} = 1 + 1 = 2$$

$$a_{1,2} = 1 + 2 = 3$$

$$a_{1,3} = 1 + 3 = 4$$

$$a_{1,4} = 1 + 4 = 5$$

$$a_{2,1} = 2 + 1 = 3$$

$$a_{2,2} = 2 + 2 = 4$$

$$a_{2,3} = 2 + 3 = 5$$

$$a_{2,4} = 2 + 4 = 6$$

$$a_{3,1} = 3 + 1 = 4$$

$$a_{3,2} = 3 + 2 = 5$$

$$a_{3,3} = 3 + 3 = 6$$

$$a_{3,4} = 3 + 4 = 7$$

La matrice A est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Pour $n = 4, p = 3$ et $a_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$
et $a_{i,j} = 0$ sinon :

Déterminons les positions (i, j) où $j = i + 1$:

- Pour $i = 1 : j = 2$ donc $a_{1,2} = 1$

- Pour $i = 2 : j = 3$ donc $a_{2,3} = 1$

- Pour $i = 3 : j = 4$ mais $j \leq 3$, donc pas d'élément
- Pour $i = 4 : j = 5$ mais $j \leq 3$, donc pas d'élément

Tous les autres éléments sont égaux à 0. La matrice B est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Pour $n = 3, p = 3$ et $a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i = j \\ 2i & \text{si } i < j \\ i - j & \text{si } i > j \end{cases}$

Déterminons chaque élément selon la condition :

$$a_{1,1} = j = 1 \text{ car } i = j = 1$$

$$a_{1,2} = 2i = 2 \times 1 = 2 \text{ car } i = 1 < j = 2$$

$$a_{1,3} = 2i = 2 \times 1 = 2 \text{ car } i = 1 < j = 3$$

$$a_{2,1} = i - j = 2 - 1 = 1 \text{ car } i = 2 > j = 1$$

$$a_{2,2} = j = 2 \text{ car } i = j = 2$$

$$a_{2,3} = 2i = 2 \times 2 = 4 \text{ car } i = 2 < j = 3$$

$$a_{3,1} = i - j = 3 - 1 = 2 \text{ car } i = 3 > j = 1$$

$$a_{3,2} = i - j = 3 - 2 = 1 \text{ car } i = 3 > j = 2$$

$$a_{3,3} = j = 3 \text{ car } i = j = 3$$

La matrice C est donc :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Pour $n = 4, p = 4$ et $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ i + 1 & \text{si } i < j \\ j - 2 & \text{si } i > j \end{cases}$:

Déterminons chaque élément selon la condition :

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= 1 \text{ car } i = j = 1 \\ a_{1,2} &= i + 1 = 1 + 1 = 2 \text{ car } i = 1 < j = 2 \\ a_{1,3} &= i + 1 = 1 + 1 = 2 \text{ car } i = 1 < j = 3 \\ a_{1,4} &= i + 1 = 1 + 1 = 2 \text{ car } i = 1 < j = 4 \\ a_{2,1} &= j - 2 = 1 - 2 = -1 \text{ car } i = 2 > j = 1 \\ a_{2,2} &= 1 \text{ car } i = j = 2 \\ a_{2,3} &= i + 1 = 2 + 1 = 3 \text{ car } i = 2 < j = 3 \\ a_{2,4} &= i + 1 = 2 + 1 = 3 \text{ car } i = 2 < j = 4 \\ a_{3,1} &= j - 2 = 1 - 2 = -1 \text{ car } i = 3 > j = 1 \\ a_{3,2} &= j - 2 = 2 - 2 = 0 \text{ car } i = 3 > j = 2 \\ a_{3,3} &= 1 \text{ car } i = j = 3 \\ a_{3,4} &= i + 1 = 3 + 1 = 4 \text{ car } i = 3 < j = 4 \\ a_{4,1} &= j - 2 = 1 - 2 = -1 \text{ car } i = 4 > j = 1 \\ a_{4,2} &= j - 2 = 2 - 2 = 0 \text{ car } i = 4 > j = 2 \\ a_{4,3} &= j - 2 = 3 - 2 = 1 \text{ car } i = 4 > j = 3 \\ a_{4,4} &= 1 \text{ car } i = j = 4 \end{aligned}$$

La matrice D est donc :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Exercice 2

Donner un exemple de chacune des matrices suivantes : 4×2 , 2×5 , matrice colonne de dimension 3, ligne de dimension 2, carrée de dimension 4, diagonale de dimension 3, scalaire de dimension 2, unité de dimension 5, triangulaires supérieure, strictement inférieure...

Solution de l'exercice 2 Voici des exemples pour chacune des matrices demandées :

1. Matrice 4×2 (4 lignes, 2 colonnes) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Matrice 2×5 (2 lignes, 5 colonnes) :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

3. Matrice colonne de dimension 3 (3 lignes, 1 colonne) :

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Matrice ligne de dimension 2 (1 ligne, 2 colonnes) :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Matrice carrée de dimension 4 (4 lignes, 4 colonnes) :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

6. Matrice diagonale de dimension 3 (tous les éléments hors de la diagonale principale sont nuls) :

$$F = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

7. Matrice scalaire de dimension 2 (matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux) :

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Matrice unité (ou identité) de dimension 5 (matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1) :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Matrices triangulaires :

Matrice triangulaire supérieure de dimension 3 (tous les éléments en dessous de la diagonale principale sont nuls) :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire strictement inférieure de dimension 3 (tous les éléments de la diagonale principale et au-dessus sont nuls) :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Exercice 3

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}$
 et $B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer $2A + 5B$.

Solution de l'exercice 3

Pour calculer $2A + 5B$, nous devons d'abord calculer $2A$ et $5B$ séparément, puis additionner les matrices résultantes.

$$2A = 2 \times \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 6 \\ 2 & 14 & -8 \end{pmatrix}$$

$$5B = 5 \times \begin{pmatrix} 7 & 9 & -2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 45 & -10 \\ 20 & -30 & 15 \end{pmatrix}$$

Maintenant, nous additionnons les deux matrices :

$$\begin{aligned} 2A + 5B &= \begin{pmatrix} 4 & -10 & 6 \\ 2 & 14 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 & 45 & -10 \\ 20 & -30 & 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+35 & -10+45 & 6+(-10) \\ 2+20 & 14+(-30) & -8+15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } 2A + 5B = \begin{pmatrix} 39 & 35 & -4 \\ 22 & -16 & 7 \end{pmatrix}$$



Exercice 4

Calculer $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 4

Posons $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Vérifions d'abord si le produit est possible. La matrice A est de taille 4×2 et la matrice B est de taille 2×3 . Le produit $A \times B$ est possible car le nombre de colonnes de A (2) est égal au nombre de lignes de B (2). Le résultat sera une matrice de taille 4×3 .

Calculons chaque élément du produit $A \times B$:

Pour la première ligne de A et les colonnes de B :

$$(A \times B)_{1,1} = (-2) \times 2 + 3 \times 4 = -4 + 12 = 8$$

$$(A \times B)_{1,2} = (-2) \times (-3) + 3 \times 0 = 6 + 0 = 6$$

$$(A \times B)_{1,3} = (-2) \times 2 + 3 \times (-1) = -4 - 3 = -7$$

Pour la deuxième ligne de A et les colonnes de B :

$$(A \times B)_{2,1} = 5 \times 2 + (-2) \times 4 = 10 - 8 = 2$$

$$(A \times B)_{2,2} = 5 \times (-3) + (-2) \times 0 = -15 + 0 = -15$$

$$(A \times B)_{2,3} = 5 \times 2 + (-2) \times (-1) = 10 + 2 = 12$$

Pour la troisième ligne de A et les colonnes de B :

$$(A \times B)_{3,1} = 0 \times 2 + 6 \times 4 = 0 + 24 = 24$$

$$(A \times B)_{3,2} = 0 \times (-3) + 6 \times 0 = 0 + 0 = 0$$

$$(A \times B)_{3,3} = 0 \times 2 + 6 \times (-1) = 0 - 6 = -6$$

Pour la quatrième ligne de A et les colonnes de B :

$$(A \times B)_{4,1} = (-1) \times 2 + 4 \times 4 = -2 + 16 = 14$$

$$(A \times B)_{4,2} = (-1) \times (-3) + 4 \times 0 = 3 + 0 = 3$$

$$(A \times B)_{4,3} = (-1) \times 2 + 4 \times (-1) = -2 - 4 = -6$$

Donc, $A \times B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -7 \\ 2 & -15 & 12 \\ 24 & 0 & -6 \\ 14 & 3 & -6 \end{pmatrix}$



Exercice 5

Soit A et B deux matrices.

On suppose que la matrice $A \times B + 2A$ existe.

Montrer qu'alors la matrice B est carrée.

Solution de l'exercice 5 Pour montrer que la matrice B est carrée, nous allons analyser les conditions nécessaires pour que l'expression $A \times B + 2A$ ait un sens.

Supposons que A est une matrice de taille $m \times n$ et B est une matrice de taille $p \times q$.

Pour que le produit $A \times B$ existe, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B , soit $n = p$. Le résultat de ce produit est alors une matrice de taille $m \times q$.

D'autre part, pour que la somme $A \times B + 2A$ existe, il faut que les deux matrices $A \times B$ et $2A$ aient la même taille. Or, $2A$ est de taille $m \times n$ (même taille que A). Par conséquent :

$$\text{Taille de } A \times B = m \times q$$

$$\text{Taille de } 2A = m \times n$$

Cela implique que $q = n$.

Nous avons donc les relations suivantes :

$$n = p \quad (\text{condition pour que le produit } A \times B \text{ existe})$$

$$q = n \quad (\text{condition pour que la somme } A \times B + 2A \text{ existe})$$

Ce qui nous donne $p = q$, ce qui signifie que B est une matrice carrée de taille $n \times n$.



Exercice 6

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer, parmi les opérations proposées ci-après, celles qui sont réalisables et celles qui ne le sont pas. On donnera le résultat lorsque l'opération est réalisable.

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1. $3B - 2C$ | 4. $A \times D$ |
| 2. $B \times C$ | 5. $D \times A$ |
| 3. C^2 | 6. $C \times A$ |

Solution de l'exercice 6 Commençons par identifier les dimensions de chaque matrice :

$A : 3 \times 1$ (matrice colonne d'ordre 3)

$B : 2 \times 2$ (matrice carrée d'ordre 2)

$C : 2 \times 3$ (matrice de taille 2×3)

$D : 1 \times 3$ (matrice ligne d'ordre 3)

Examinons maintenant chaque opération :

1. $3B - 2C$:

Pour additionner ou soustraire des matrices, elles doivent avoir les mêmes dimensions. B est de taille 2×2 et C est de taille 2×3 . Leurs dimensions sont différentes, donc l'opération $3B - 2C$ n'est pas réalisable.

2. $B \times C$:

Pour multiplier deux matrices, le nombre de colonnes de la première doit être égal au nombre de lignes de la seconde. B est de taille 2×2 et C est de taille 2×3 . Le nombre de colonnes de B (2) est égal au nombre de lignes de C (2), donc l'opération est réalisable.

Calculons $B \times C$:

$$\begin{aligned}
B \times C &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -9 + 2 & 12 + 0 & -6 + 14 \\ 3 + 3 & -4 + 0 & 2 + 21 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -7 & 12 & 8 \\ 6 & -4 & 23 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. C^2 :

Pour calculer $C^2 = C \times C$, il faut que le C soit une matrice carrée. C est de taille 2×3 , donc le nombre de colonnes (3) n'est pas égal au nombre de lignes (2). L'opération C^2 n'est donc pas réalisable.

4. $A \times D$:

A est de taille 3×1 et D est de taille 1×3 . Le nombre de colonnes de A (1) est égal au nombre de lignes de D (1), donc l'opération est réalisable.

Calculons $A \times D$:

$$\begin{aligned}
A \times D &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \times 3 & 1 \times (-1) & 1 \times 4 \\ (-2) \times 3 & (-2) \times (-1) & (-2) \times 4 \\ 5 \times 3 & 5 \times (-1) & 5 \times 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -6 & 2 & -8 \\ 15 & -5 & 20 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5. $D \times A$:

D est de taille 1×3 et A est de taille 3×1 . Le nombre de colonnes de D (3) est égal au nombre de lignes de A (3), donc l'opération est réalisable.

Calculons $D \times A$:

$$\begin{aligned}
D \times A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= ((3 \times 1) + ((-1) \times (-2)) + (4 \times 5)) \\
&= (3 + 2 + 20) \\
&= (25)
\end{aligned}$$

Notons que $D \times A$ est une matrice 1×1 , donc un scalaire.

6. $C \times A$:

C est de taille 2×3 et A est de taille 3×1 . Le nombre de colonnes de C (3) est égal au nombre de lignes de A (3), donc l'opération est réalisable.

Calculons $C \times A$:

$$\begin{aligned}
C \times A &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (3 \times 1) + ((-4) \times (-2)) + (2 \times 5) \\ (1 \times 1) + (0 \times (-2)) + (7 \times 5) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 + 8 + 10 \\ 1 + 0 + 35 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 21 \\ 36 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$



Exercice 7

Donner un exemple (autre que ceux cités en cours ou en exercice) de deux matrices qui commutent i.e. dont les multiplications dans les deux sens donnent le même résultat.

Solution de l'exercice 7

Rappelons que deux matrices A et B commutent si

$$A \times B = B \times A$$

Voici un exemple de deux matrices qui commutent :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Vérifions que $A \times B = B \times A$:

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 \times 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \times 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \times A &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On constate bien que $A \times B = B \times A$.

Plus généralement, on peut remarquer que deux matrices diagonales de même dimension commutent toujours entre elles. En effet, le produit de deux matrices diagonales de même dimension est une matrice diagonale de même dimension dont les éléments diagonaux sont les produits des éléments diagonaux correspondants des matrices initiales.



Exercice 8

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer alors les matrices suivantes :

$A \times B, B \times A, A^2, B^2, A^2 - B^2$ et $(A+B) \times (A-B)$.

Solution de l'exercice 8

1. $A \times B$:

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 0 \times 1 & 1 \times 1 + 0 \times 0 \\ 0 \times 0 + 0 \times 1 & 0 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. $B \times A$:

$$\begin{aligned} B \times A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 0 + 1 \times 0 \\ 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. $A^2 = A \times A$:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 0 \\ 0 \times 1 + 0 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. $B^2 = B \times B$:

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 1 \times 1 & 0 \times 1 + 1 \times 0 \\ 1 \times 0 + 0 \times 1 & 1 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. $A^2 - B^2$:

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. $(A+B) \times (A-B)$:

Calculons d'abord $A+B$ et $A-B$:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant, calculons $(A+B) \times (A-B)$:

$$\begin{aligned} (A+B) \times (A-B) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Exercice 9

Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice D non nulle telle que $C \times D = D \times C = O_3$.

Solution de l'exercice 9

Nous cherchons une matrice D non nulle telle que $C \times D = D \times C = O_3$.

Calculons d'abord le produit $C \times D$ pour une matrice

D dans le cas général. Soit $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$.

Alors,

$$\begin{aligned} C \times D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De même, calculons $D \times C$:

$$\begin{aligned} D \times C &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour que $C \times D = 0$, il faut que tous les éléments de $C \times D$ soient nuls, ce qui nous donne les conditions :

$$d_{11} = d_{12} = d_{13} = d_{21} = d_{22} = d_{23} = 0$$

Pour que $D \times C = O_3$, il faut que tous les éléments de $D \times C$ soient nuls, ce qui nous donne les conditions :

$$d_{11} = d_{12} = d_{21} = d_{22} = d_{31} = d_{32} = 0$$

En combinant toutes ces conditions, nous avons :

$$d_{11} = d_{12} = d_{13} = d_{21} = d_{22} = d_{23} = d_{31} = d_{32} = 0$$

Donc, la matrice D doit être de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

où d_{33} peut être n'importe quel nombre réel non nul.

Vérifions que cette matrice satisfait bien

$C \times D = D \times C = O_3$:

$$\begin{aligned} C \times D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} D \times C &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3 \end{aligned}$$

Donc, par exemple, en prenant $d_{33} = 1$, la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice non nulle vérifiant $C \times D = D \times C = O_3$.



Exercice 10

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 .
2. En déduire que A n'est pas inversible.
3. Montrer que la matrice $I - A$, où I est la matrice unité d'ordre 3, admet une matrice inverse de la forme $I - cA$, avec c un réel à déterminer.

Solution de l'exercice 10

1. Calculons $A^2 = A \times A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons chaque élément de cette matrice :

$$(A^2)_{11} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 3$$

$$(A^2)_{12} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 3$$

$$(A^2)_{13} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 3$$

En procédant de la même manière pour les autres éléments, on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$$

2. Supposons par l'absurde que A est inversible, d'inverse A^{-1} . Alors

$$\begin{aligned} A^2 &= 3A \iff A^2 \times A^{-1} = 3A \times A^{-1} \\ &\iff A \times (A \times A^{-1}) = 3 \times (A \times A^{-1}) \\ &\iff A \times I = 3I \\ &\iff A = 3I \end{aligned}$$

D'où contradiction. Ainsi A n'est pas inversible.

3. Nous cherchons une valeur de c telle que

$$(I - A) \times (I - cA) = I.$$

Développons le membre de gauche :

$$\begin{aligned}(I - A) \times (I - cA) &= I - cA - A + cA^2 \\ &= I - cA - A + c \times 3A \\ &\text{(d'après la question a)} \\ &= I - cA - A + 3cA \\ &= I - A + (3c - c)A \\ &= I - A + 2cA\end{aligned}$$

Pour que cette expression soit égale à I , il faut que $-A + 2cA = O_3$, ce qui implique $2cA = A$, soit $c = \frac{1}{2}$.

Vérifions que $(I - A) \times (I - \frac{1}{2}A) = I$:

$$\begin{aligned}(I - A) \times (I - \frac{1}{2}A) &= I - \frac{1}{2}A - A + \frac{1}{2}A^2 \\ &= I - \frac{1}{2}A - A + \frac{1}{2} \times 3A \\ &= I - \frac{1}{2}A - A + \frac{3}{2}A \\ &= I - A + A \\ &= I\end{aligned}$$

Donc, la matrice inverse de $I - A$ est $I - \frac{1}{2}A$.

Exercice 11

Soit A une matrice carrée inversible. Montrer que

1. Si $A^3 = A$, alors $A^2 = I$
2. $(A^{-1})^2 \times A^3 = A$

Solution de l'exercice 11

1. Soit A une matrice carrée inversible telle que $A^3 = A$. Puisque A est inversible, on peut multiplier les deux membres de l'égalité $A^3 = A$ par A^{-1} à gauche :

$$\begin{aligned}A^3 = A &\iff A^{-1} \times A^3 = A^{-1} \times A \\ &\iff A^{-1} \times A \times A \times A = A^{-1} \times A \\ &\iff I \times A \times A = I \\ &\iff A^2 = I\end{aligned}$$

Nous avons donc montré que si A est inversible et $A^3 = A$, alors $A^2 = I$.

2. Soit A une matrice carrée inversible. Nous voulons démontrer que $(A^{-1})^2 \times A^3 = A$.

Calculons directement le produit :

$$\begin{aligned}(A^{-1})^2 \times A^3 &= A^{-1} \times A^{-1} \times A \times A \times A \\ &= A^{-1} \times (A^{-1} \times A) \times A \times A \\ &= A^{-1} \times I \times A \times A \\ &= A^{-1} \times A \times A \\ &= I \times A \\ &= A\end{aligned}$$

Nous avons donc bien $(A^{-1})^2 \times A^3 = A$.

Exercice 12

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer A^3 et montrer alors que A est inversible. Préciser A^{-1} en fonction de A , puis son expression numérique.

Solution de l'exercice 12

Commençons par calculer $A^2 = A \times A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculons chaque élément de cette matrice :

$$\begin{aligned}(A^2)_{11} &= 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 2 = 0 \\ (A^2)_{12} &= 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 1 \\ (A^2)_{13} &= 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times (-1) = 0 \\ (A^2)_{21} &= (-1) \times 1 + 0 \times (-1) + 0 \times 2 = -1 \\ (A^2)_{22} &= (-1) \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = -1 \\ (A^2)_{23} &= (-1) \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times (-1) = 0 \\ (A^2)_{31} &= 2 \times 1 + 0 \times (-1) + (-1) \times 2 = 0 \\ (A^2)_{32} &= 2 \times 1 + 0 \times 0 + (-1) \times 0 = 2 \\ (A^2)_{33} &= 2 \times 0 + 0 \times 0 + (-1) \times (-1) = 1\end{aligned}$$

Donc :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Maintenant, calculons $A^3 = A^2 \times A$:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculons chaque élément de cette matrice :

$$\begin{aligned}(A^3)_{11} &= 0 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 2 = -1 \\ (A^3)_{12} &= 0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 0 \\ (A^3)_{13} &= 0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times (-1) = 0 \\ (A^3)_{21} &= (-1) \times 1 + (-1) \times (-1) + 0 \times 2 = 0 \\ (A^3)_{22} &= (-1) \times 1 + (-1) \times 0 + 0 \times 0 = -1 \\ (A^3)_{23} &= (-1) \times 0 + (-1) \times 0 + 0 \times (-1) = 0 \\ (A^3)_{31} &= 0 \times 1 + 2 \times (-1) + 1 \times 2 = 0 \\ (A^3)_{32} &= 0 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 0 = 0 \\ (A^3)_{33} &= 0 \times 0 + 2 \times 0 + 1 \times (-1) = -1\end{aligned}$$

Donc :

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$$

où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

Puisque $A^3 = -I_3$, multiplions à droite par A :

$$\begin{aligned} A^3 \times A &= (-I_3) \times A \\ A^4 &= -A \end{aligned}$$

Multiplions maintenant les deux membres de l'égalité par A^{-1} (en supposant que A est inversible) :

$$\begin{aligned} A^4 \times A^{-1} &= -A \times A^{-1} \\ A^3 &= -I_3 \end{aligned}$$

Ainsi $A \times (-A^2) = I_3$,

Nous savons que $A^3 = -I_3$, donc $A \times A^2 = -I_3$, donc $A \times (-A^2) = I_3$.

On a vu dans le cours qu'on a donc de même $(-A^2) \times A = I_3$.

Donc $A^{-1} = -A^2$, c'est-à-dire

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 13

Résoudre le système suivant grâce aux matrices et à la calculatrice pour trouver la matrice inverse.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \end{cases}$$

Solution de l'exercice 13 Nous pouvons réécrire le système sous forme matricielle $AX = B$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système, nous devons calculer

$$X = A^{-1}B$$

D'après la calculatrice,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -7 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On effectue ensuite le produit $A^{-1}B$:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{(4; 3; 2)\}$.

Exercice 14

On cherche à déterminer trois réels a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) passe par les trois points $A(1; 1)$, $B(-1; -1)$ et $C(2; 5)$.

- Traduire l'énoncé sous la forme d'un système, puis en donner une écriture matricielle.
- Répondre alors au problème posé.

Solution de l'exercice 14

- Pour que la parabole passe par ces trois points, les coordonnées de chaque point doivent vérifier l'équation $y = ax^2 + bx + c$. Cela donne le système suivant :

Pour le point $A(1; 1)$:

$$1 = a \times 1^2 + b \times 1 + c$$

i.e.

$$1 = a + b + c$$

Pour le point $B(-1; -1)$:

$$-1 = a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c$$

i.e.

$$-1 = a - b + c$$

Pour le point $C(2; 5)$:

$$5 = a \times 2^2 + b \times 2 + c$$

i.e.

$$5 = 4a + 2b + c$$

On a donc

$$(S) : \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a - b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 5 \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Pour résoudre ce système, on va vérifier que A est inversible, puis calculer $X = A^{-1}B$.

D'après la calculatrice, $\det(A) \neq 0$. Donc A est inversible. Cherchons donc la matrice inverse A^{-1} à l'aide d'une calculatrice :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Puis on calcule $A^{-1}B$:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les coefficients cherchées sont donc $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$.

L'équation de la parabole est donc

$$y = x^2 + x - 1$$

Exercice 15

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Calculer les matrices A^2 et $A^2 - 3A$.
- (a) En déduire que la matrice A est inversible et exprimer sa matrice inverse A^{-1} comme une combinaison linéaire de A et de I .
(b) Déterminer explicitement la matrice A^{-1} .
- On considère le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} y - z = 4 \\ -x + 2y - z = 0. \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

- Écrire ce système sous forme matricielle.
- Résoudre alors (S) grâce aux questions précédentes.

(a) On a $A^2 - 3A = -2I$, donc

$$A(A - 3I) = -2I$$

c'est-à-dire

$$A \times \left(-\frac{1}{2}\right) (A - 3I) = I$$

Donc l'inverse de A est

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{2}(A - 3I) \\ &= -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I \end{aligned}$$

(b) On calcule explicitement A^{-1} , et on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (a) On écrit (S) sous la forme $AX = B$, avec A la matrice de l'énoncé, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
(b) On sait que $X = A^{-1}B$, et on connaît A^{-1} d'après la question précédente. Ainsi :

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{S} = \{(5; 1; -3)\}$

Solution de l'exercice 15

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Calculons les matrices A^2 et $A^2 - 3A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 16

En 2017, dans une région démographiquement stable, 50 000 personnes n'utilisent que leur voiture pour leurs déplacements, 40 000 personnes n'utilisent que les transports en commun et 10 000 personnes utilisent seulement un autre moyen de transport (vélo, moto,...). Une étude statistique a permis d'établir que d'une année sur l'autre :

- parmi les personnes qui utilisent leur voiture : 30 % optent pour les transports en commun, 60 % continuent à utiliser leur voiture et 10 % choisissent un autre moyen de transport.
- parmi les personnes qui utilisent les transports en commun, 20% changent pour passer à la voiture, 10% changent pour un autre moyen de transport et 70% poursuivent avec les transports en commun.
- parmi les personnes qui utilisent un autre moyen de transport, 40% poursuivent, 20% passent à la voiture et 40% passent aux transports en commun.

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $P_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \\ a_n \end{pmatrix}$ où v_n

est le nombre de personnes utilisant leur voiture, c_n le nombre de personnes utilisant les transports en commun et a_n le nombre de personnes utilisant un autre moyen de transport pendant l'année 2017 + n .

1. Donner P_0 .
2. (a) Exprimer v_1, c_1 et a_1 en fonction de v_0, c_0 et a_0
(b) Donner la matrice M telle que : $P_1 = MP_0$.
(c) Exprimer P_2 en fonction de P_1 .
(d) Combien de personnes utiliseront-elles leur voiture en 2019 ?

Solution de l'exercice 16

1. D'après l'énoncé,

$$P_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ c_0 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 40\,000 \\ 10\,000 \end{pmatrix}$$

2. (a) D'après l'énoncé,

$$\begin{aligned} v_1 &= 0,6v_0 + 0,2c_0 + 0,2a_0 \\ c_1 &= 0,3v_0 + 0,7c_0 + 0,4a_0 \\ a_1 &= 0,1v_0 + 0,1c_0 + 0,4a_0 \end{aligned}$$

- (b) La matrice M cherchée est :

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$

- (c) $P_2 = MP_1$

(d) $P_2 = MP_1 = M^2P_0$

Le calcul donne $P_2 = \begin{pmatrix} 36\,000 \\ 50\,100 \\ 13\,900 \end{pmatrix}$

Exercice 17

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $3A, 3A^2, 3A^3$ et $3A^4$.
2. En déduire une conjecture sur la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et la prouver.

Solution de l'exercice 17

1. • $3 \times A = \begin{pmatrix} 1,2 & 1,8 \\ 0,9 & 2,1 \end{pmatrix}$
• $3 \times A^2 = \begin{pmatrix} 1,02 & 1,98 \\ 0,99 & 2,01 \end{pmatrix}$
• $3 \times A^3 = \begin{pmatrix} 1,002 & 1,998 \\ 0,999 & 2,001 \end{pmatrix}$
• $3 \times A^4 = \begin{pmatrix} 1,0002 & 1,9998 \\ 0,9999 & 2,0001 \end{pmatrix}$
2. On conjecture que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$3 \times A^n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{10^n} & 2 - \frac{2}{10^n} \\ 1 - \frac{1}{10^n} & 2 + \frac{1}{10^n} \end{pmatrix}$$

Montrons cette conjecture par récurrence sur $\mathbb{N}^*$.

- Initialisation : pour $n = 1$, on a montré que $3 \times A^1 = \begin{pmatrix} 1,2 & 1,8 \\ 0,9 & 2,1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$$3 \times A^1 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{10^1} & 2 - \frac{2}{10^1} \\ 1 - \frac{1}{10^1} & 2 + \frac{1}{10^1} \end{pmatrix}$$

- Hérédité : supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$,

$$3 \times A^n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{10^n} & 2 - \frac{2}{10^n} \\ 1 - \frac{1}{10^n} & 2 + \frac{1}{10^n} \end{pmatrix}$$

Alors

$$3 \times A^{n+1} = 3 \times A^n \times A$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{10^n} & 2 - \frac{2}{10^n} \\ 1 - \frac{1}{10^n} & 2 + \frac{1}{10^n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{10^n} & 2 - \frac{2}{10^n} \\ 1 - \frac{1}{10^n} & 2 + \frac{1}{10^n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient $3A^{n+1} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{10} + \frac{8}{10^{n+1}} + \frac{6}{10} - \frac{6}{10^{n+1}} & \frac{6}{10} + \frac{12}{10^{n+1}} + \frac{14}{10} - \frac{14}{10^{n+1}} \\ \frac{4}{10} - \frac{4}{10^{n+1}} + \frac{6}{10} + \frac{3}{10^{n+1}} & \frac{6}{10} - \frac{6}{10^{n+1}} + \frac{14}{10} + \frac{7}{10^{n+1}} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$3A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{10^{n+1}} & 2 - \frac{2}{10^{n+1}} \\ 1 - \frac{1}{10^{n+1}} & 2 + \frac{1}{10^{n+1}} \end{pmatrix}$$

- Conclusion : la propriété est vraie au rang $n = 1$ et est héréditaire. Ainsi, par le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$3 \times A^n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{10^n} & 2 - \frac{2}{10^n} \\ 1 - \frac{1}{10^n} & 2 + \frac{1}{10^n} \end{pmatrix}$$

Exercice 18

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .
2. Démontrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} 2^n & -n \times 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$
3. Préciser, en justifiant, si on peut étendre cette propriété aux entiers $n = 0$ et $n = -1$?

Solution de l'exercice 18

1. $\det(A) = 4 \neq 0$, donc A est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & -n \times 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

- Initialisation : pour $n = 1$, on a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^1 & -1 \times 2^0 \\ 0 & 2^1 \end{pmatrix}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

- Hérédité : supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & -n \times 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & -n \times 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^n + -n \times 2^{n-1} \times 2 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -(n+1) \times 2^n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Conclusion : la propriété est vraie au rang $n = 1$ et est héréditaire. Ainsi, par le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \geq 1$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & -n \times 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

3. Pour $n = 0$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 2^0 & 0 \times 2^{-1} \\ 0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $A^0 = I_2$, donc la relation est vraie pour $n = 0$.

Pour $n = -1$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 2^{-1} & 1 \times 2^{-2} \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi la relation est vraie pour $n = -1$.