

Séquence XIV – Matrices

Exercice XIV.1

Déterminer les matrices $n \times p$ notées $(a_{i,j})$ telles que, pour tous entiers i compris entre 1 et n et j compris entre 1 et p , on a :

1. $n = 3, p = 4$ et $a_{i,j} = i + j$

2. $n = 4, p = 3$ et $a_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$
et $a_{i,j} = 0$ sinon

3. $n = 3, p = 3$ et $a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i = j \\ 2i & \text{si } i < j \\ i - j & \text{si } i > j \end{cases}$

4. $n = 4, p = 4$ et $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ i + 1 & \text{si } i < j \\ j - 2 & \text{si } i > j \end{cases}$

Exercice XIV.2

Donner un exemple de chacune des matrices suivantes : 4×2 , 2×5 , matrice colonne de dimension 3, ligne de dimension 2, carrée de dimension 4, diagonale de dimension 3, scalaire de dimension 2, unité de dimension 5, triangulaires supérieure, strictement inférieure...

Exercice XIV.3

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}$

et $B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer $2A + 5B$.

Exercice XIV.4

Calculer $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice XIV.5

Soit A et B deux matrices.

On suppose que la matrice $A \times B + 2A$ existe.

Montrer qu'alors la matrice B est carrée.

Exercice XIV.6

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer, parmi les opérations proposées ci-après, celles qui sont réalisables et celles qui ne le sont pas. On donnera le résultat lorsque l'opération est réalisable.

1. $3B - 2C$

4. $A \times D$

2. $B \times C$

5. $D \times A$

3. C^2

6. $C \times A$

Exercice XIV.7

Donner un exemple (autre que ceux cités en cours ou en exercice) de deux matrices qui commutent i.e. dont les multiplications dans les deux sens donnent le même résultat.

Exercice XIV.8

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer alors les matrices suivantes :

$A \times B, B \times A, A^2, B^2, A^2 - B^2$ et $(A+B) \times (A-B)$.

Exercice XIV.9

Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice D non nulle telle que $C \times D = D \times C = O_3$.

Exercice XIV.10

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 .

2. En déduire que A n'est pas inversible.

3. Montrer que la matrice $I - A$, où I est la matrice unité d'ordre 3, admet une matrice inverse de la forme $I - cA$, avec c un réel à déterminer.

Exercice XIV.11

Soit A une matrice carrée inversible. Montrer que

1. Si $A^3 = A$, alors $A^2 = I$
2. $(A^{-1})^2 \times A^3 = A$

Exercice XIV.12

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer A^3 et montrer alors que A est inversible. Préciser A^{-1} en fonction de A , puis son expression numérique.

Exercice XIV.13

Résoudre le système suivant grâce aux matrices et à la calculatrice pour trouver la matrice inverse.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \end{cases}$$

Exercice XIV.14

On cherche à déterminer trois réels a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) passe par les trois points $A(1; 1)$, $B(-1; -1)$ et $C(2; 5)$.

1. Traduire l'énoncé sous la forme d'un système, puis en donner une écriture matricielle.
2. Répondre alors au problème posé.

Exercice XIV.15

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les matrices A^2 et $A^2 - 3A$.
2. (a) En déduire que la matrice A est inversible et exprimer sa matrice inverse A^{-1} comme une combinaison linéaire de A et de I .
(b) Déterminer explicitement la matrice A^{-1} .
3. On considère le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} y - z = 4 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

- (a) Écrire ce système sous forme matricielle.
- (b) Résoudre alors (S) grâce aux questions précédentes.

Exercice XIV.16

En 2017, dans une région démographiquement stable, 50 000 personnes n'utilisent que leur voiture pour leurs déplacements, 40 000 personnes n'utilisent que les transports en commun et 10 000 personnes utilisent seulement un autre moyen de transport (vélo, moto,...). Une étude statistique a permis d'établir que d'une année sur l'autre :

- parmi les personnes qui utilisent leur voiture : 30 % optent pour les transports en commun, 60 % continuent à utiliser leur voiture et 10 % choisissent un autre moyen de transport.
- parmi les personnes qui utilisent les transports en commun, 20% changent pour passer à la voiture, 10% changent pour un autre moyen de transport et 70% poursuivent avec les transports en commun.
- parmi les personnes qui utilisent un autre moyen de transport, 40% poursuivent, 20% passent à la voiture et 40% passent aux transports en commun.

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $P_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \\ a_n \end{pmatrix}$ où v_n

est le nombre de personnes utilisant leur voiture, c_n le nombre de personnes utilisant les transports en commun et a_n le nombre de personnes utilisant un autre moyen de transport pendant l'année $2017+n$.

1. Donner P_0 .
2. (a) Exprimer v_1, c_1 et a_1 en fonction de v_0, c_0 et a_0
(b) Donner la matrice M telle que : $P_1 = MP_0$.
(c) Exprimer P_2 en fonction de P_1 .
(d) Combien de personnes utiliseront-elles leur voiture en 2019 ?

Exercice XIV.17

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $3A, 3A^2, 3A^3$ et $3A^4$.
2. En déduire une conjecture sur la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et la prouver.

Exercice XIV.18

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .
2. Démontrer par récurrence que,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} 2^n & -n \times 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$
3. Préciser, en justifiant, si on peut étendre cette propriété aux entiers $n = 0$ et $n = -1$?