

Matrices

1. Généralités

A. Définitions

■ DÉFINITION :

Soit n et p deux entiers strictement positifs.

Une **matrice** $n \times p$ est un tableau de nombres, contenant n lignes et p colonnes.

« $n \times p$ » s'appelle **sa dimension** ou encore **son format**.

Les nombres du tableau sont appelés **termes** ou **coefficient** de la matrice.

Remarque : On indique le nombre de lignes en premier. Procédé mnémotechnique : LIN-COL (du nom du président américain Abraham Lincoln)

Notation : On peut utiliser un « double indice ». Par exemple a_{23} représente le nombre à l'intersection de la deuxième ligne et de la troisième colonne.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

B. Cas particuliers - vocabulaire

■ VOCABULAIRE :

Une **matrice ligne** est une matrice qui ne contient qu'une seule ligne (donc une matrice $1 \times p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$)

Exemple :

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ est matrice ligne de taille 1×3 .

■ VOCABULAIRE :

Une **matrice colonne** est une matrice qui ne contient qu'une seule colonne (donc une matrice $n \times 1$, avec $n \in \mathbb{N}^*$)

Exemple :

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de taille 3×1 .

■ VOCABULAIRE :

Une **matrice carrée** est une matrice qui a autant de lignes que de colonnes (donc $n = p$).

Exemple :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de dimension 3.

■ VOCABULAIRE :

Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont tous les coefficients situés en dehors de la **diagonale principale** (celle issue du coin supérieur gauche et allant vers le coin inférieur droit) sont nuls.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale de dimension 3.

■ VOCABULAIRE :

Une **matrice scalaire** est une matrice diagonale dont tous les termes qui sont situés sur la diagonale principale sont égaux.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice scalaire de dimension 3 où tous les éléments diagonaux valent 4.

■ VOCABULAIRE :

Une **matrice unité** est une matrice scalaire dont tous les coefficients situés sur la diagonale principale sont égaux à 1. On la note I_n .

Exemple :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité I_3 de dimension 3

■ VOCABULAIRE :

Une **matrice nulle** est une matrice dont tous les termes sont nuls.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nulle de taille 2×3

■ VOCABULAIRE :

Une **matrice triangulaire supérieure** est une matrice carrée dont tous les coefficients en dessous de la diagonale principale sont nuls.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure de dimension 3

■ VOCABULAIRE :

Une **matrice triangulaire inférieure** est une matrice carrée dont tous les coefficients au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure de dimension 3

■ VOCABULAIRE :

Une **matrice strictement triangulaire supérieure** est une matrice carrée dont tous les coefficients de la diagonale principale et en dessous sont nuls.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice strictement triangulaire supérieure de dimension 3

■ VOCABULAIRE :

Une **matrice strictement triangulaire inférieure** est une matrice carrée dont tous les coefficients de la diagonale principale et au-dessus sont nuls.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice strictement triangulaire inférieure de dimension 3

■ DÉFINITION :

Deux matrices A et B sont **égales** si elles ont la même dimension $n \times p$ et si, pour tout couple $(i; j)$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$,

$$a_{i,j} = b_{i,j}$$

C. Opérations sur les matrices

a. Transposition

■ DÉFINITION :

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes, dont les coefficients sont $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. La **transposée** de A , notée tA ou A^T est la matrice à p lignes et n colonnes dont le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ème colonne est (a_{ji}) . Autrement dit, on permute les termes des lignes et des colonnes.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

a. Addition

■ DÉFINITION :

Soient deux matrices A et B de même dimension $n \times p$.

La **matrice somme** des matrices A et B est la matrice $C = (c_{i,j})$ dont les coefficients sont définis pour tout couple $(i; j)$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$ par :

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$



Attention

On ne peut additionner que deux matrices de même dimension $n \times p$, en ajoutant les coefficients de même position.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 3-3 \\ -4+1 & 0+4 \\ 1+2 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

■ PROPRIÉTÉ :

L'addition de matrices est une opération **associative**, c'est-à-dire que, si A , B et C sont trois matrices de même dimension,

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

■ PROPRIÉTÉ :

L'addition de matrices est une opération **commutative**, c'est-à-dire que, si A et B sont deux matrices de même dimension,

$$A + B = B + A$$

b. Multiplication par un réel

■ DÉFINITION :

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de dimension $n \times p$ et $k \in \mathbb{R}$.

Le **produit du réel k par la matrice A** est la matrice $M = (m_{i,j})$ dont les coefficients sont définis pour tout couple $(i; j)$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$, par :

$$m_{i,j} = k \times a_{i,j}$$

Exemple :

$$3 \times \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 & 3 \times 4 & 3 \times (-1) \\ 3 \times 5 & 3 \times (-2) & 3 \times 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 15 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : Une matrice scalaire de dimension n , dont tous les termes de la diagonale principale valent k , peut donc s'écrire $k \times I_n$.

■ PROPRIÉTÉ :

Si A, B et C sont trois matrices, et si k et k' sont deux réels, on a :

- $k(A + B) = kA + kB$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$,
qu'on écrira $A + B + C$
- $kA + k'A = (k + k')A$
- $k(k'A) = (kk')A$

Exemple :

Un libraire possède deux magasins. Il crée une matrice S de la manière suivante : il relève les stocks de deux livres L_1 et L_2 (dans les colonnes 1 et 2 respectivement) dans le premier magasin M_1 et le second magasin M_2 (dans les lignes 1 et 2 respectivement).

Il obtient : $S = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 26 & 25 \end{pmatrix}$.

- Interpréter le coefficient $s_{1,2}$.
 $s_{1,2}$ est le coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne de la matrice S . Il s'agit des ventes du livres 2 dans le premier magasin.

- Le libraire décide d'augmenter les stocks en livrant 10 exemplaires du livre L_1 et 15 exemplaires du livre L_2 dans chaque magasin. Traduire cette opération par une addition de matrices.

On pose $B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$. Alors l'opération effectuée est $A + B$.

- Après deux semaines de vente des livres, la matrice des stocks est : $S' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. Le gérant décide d'augmenter chacun des stocks de 50 %. Exprimer la nouvelle matrice des stocks S'' en fonction de S' .

On obtient $S'' = 1,5S'$.

Exemple :

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A + B$ et $2A - 3B$
 $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$
 $2A - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$
- Montrer qu'il existe deux réels x et y tels que :
 $A = xI_2 + yB$.

$$xI_2 + yB = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 2y \\ 2y & 4y \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} x + y & 2y \\ 2y & x + 4y \end{pmatrix}$$

$$A = xI_2 + yB \iff \begin{cases} x + y = 1 \\ 2y = 6 \\ x + 4y = 10 \end{cases}$$

Les deux premières équations du système donne $y = 3$, et donc $x = -2$. On vérifie dans la troisième équation :

$$x + 4 \times y = -2 + 12 = 10$$

Donc $A = -2I_2 + 3J$.

c. Multiplication de deux matrices

■ DÉFINITION :

Soit une matrice ligne $A = (a_{1,1} \ a_{1,2} \ \dots \ a_{1,p})$
 et une matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{p,1} \end{pmatrix}$ comportant
 chacune p coefficients.

Le **produit de la matrice A par la matrice B** ,
 noté $A \times B$ est la matrice $C = (c_{1,1})$ où

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= \sum_{k=1}^p a_{1,k} \times b_{k,1} \\ &= a_{1,1} \times b_{1,1} + a_{1,2} \times b_{2,1} + \dots + a_{1,p} \times b_{p,1} \end{aligned}$$

Exemple :

Soit $A = (1 \ -2)$ et $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A \times B$.

$$C = A \times B = (-10)$$

Soit $A = (8 \ -4 \ 3)$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$.

$$C = A \times B = (11)$$

Trouver le réel x tel que $A \times B = C$

où $A = (-3 \ x \ 2x)$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $C = (1)$.

$$C = A \times B = (-6 + 5x - 2x) = (-6 + 3x)$$

On veut que $C = (1)$, donc on résout $-6 + 3x = 1$,

$$\text{i.e. } \boxed{x = \frac{7}{3}}.$$

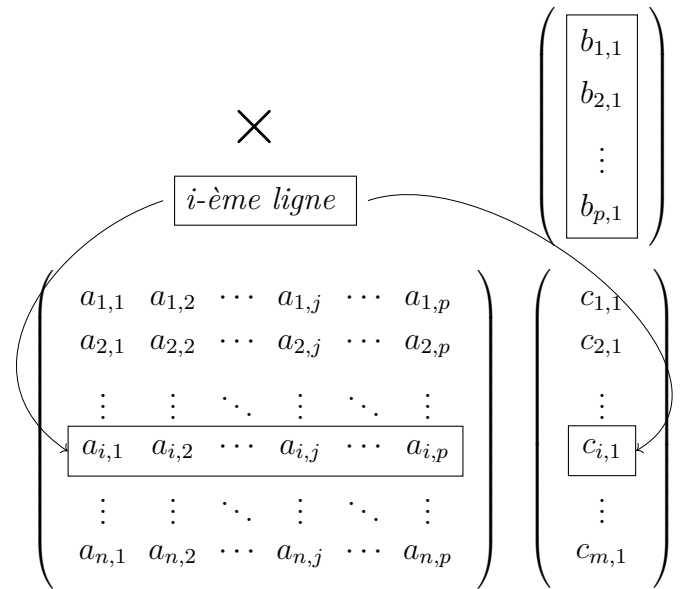
■ DÉFINITION :

Soit A une matrice de dimension $n \times p$ et B une
 matrice colonne de dimension $p \times 1$.

Le **produit de la matrice A par la matrice B** ,
 noté $A \times B$ est la matrice colonne $C = (c_{i,1})$ dont
 les coefficients sont définis pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ par :

$$\begin{aligned} c_{i,1} &= \sum_{k=1}^p a_{i,k} \times b_{k,1} \\ &= a_{i,1} \times b_{1,1} + a_{i,2} \times b_{2,1} + \dots + a_{i,p} \times b_{p,1} \end{aligned}$$

Ainsi, la i -ème ligne de $C = A \times B$ est le produit
 de la i -ème de A par la matrice colonne B .



Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $C = A \times B$.

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculer $C = I_2 \times B$ où $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$C = I_2 \times B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculer $C = I_3 \times B$ où $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$C = I_3 \times B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Est-il vrai que pour toute matrice $\begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{pmatrix}$,

$$I_n \times B = B?$$

C'est vrai !

■ DÉFINITION :

Soit A une matrice de dimension $n \times p$ et B une matrice de dimension $p \times m$.

Le **produit de la matrice A par la matrice B** , noté $A \times B$ est la matrice $C = (c_{i,j})$ dont les coefficients sont définis pour tout couple $(i; j)$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; m \rrbracket$, par :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} \times b_{k,j}$$

$$= a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + \cdots + a_{i,p} \times b_{p,j}$$

Le coefficient $c_{i,j}$ de $A \times B$ est donc le produit de la i -ème ligne de A par la j -ème colonne de B .

$$\begin{matrix} & \times & \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p,1} & b_{p,2} & \cdots & b_{p,j} & \cdots & b_{p,m} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,p} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,j} & \cdots & c_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i,1} & c_{i,2} & \cdots & c_{i,j} & \cdots & c_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,j} & \cdots & c_{m,p} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Remarque : Le produit matriciel $A \times B$ n'a de sens que si le nombre de colonnes de A est le nombre de lignes de B .

Remarque : Le nombre de lignes du produit $A \times B$ est celui de A et son nombre de colonnes est celui de B .

Exemple :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Effectuer, lorsque c'est possible, les produits $A \times B$ et $B \times A$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 17 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B \times A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$



Attention

La multiplicative de matrices n'est **pas commutative**.

Exemple :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Calculer } A \times B \text{ puis } B \times A.$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

■ PROPRIÉTÉ :

Lorsque ces produits et sommes ont un sens :

- $A \times I_n = I_n \times A = A$
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $\forall k \in \mathbb{R}, k(A \times B) = (kA) \times B = A \times (kB)$

Exemple :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculer $(A + B)^2$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } (A + B)^2 = \begin{pmatrix} 61 & 45 \\ 60 & 76 \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et J^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } J^2 = O_2.$$

Vérifier que $A = 4J + I_2$ et retrouver ainsi A^2 .

$$4J + I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Alors

$$\begin{aligned} A^2 &= (4J + I_2)^2 \\ &= 16J^2 + 4J \times I_2 + I_2 \times 4J + I_2^2 \\ &= 4J \times I_2 + 4J \times I_2 + I_2^2 \\ &= 8J \times I_2 + I_2 \\ &= 8J + I_2 \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple :

Un fleuriste propose deux types de bouquets : « Classique » et « Élégance ». Chaque mois, les ventes évoluent selon les tendances suivantes :

- Les ventes du bouquet « Classique » au mois $n + 1$ sont égales à 0,8 fois les ventes du « Classique » plus 0,3 fois les ventes de l'« Élégance » au mois n .
- Les ventes du bouquet « Élégance » au mois $n + 1$ sont égales à 0,2 fois les ventes du « Classique » plus 0,7 fois les ventes de l'« Élégance » au mois n .

En janvier (mois 0), le fleuriste a vendu 50 bouquets « Classique » et 30 bouquets « Éléance ». Notons C_n les ventes du bouquet « Classique » et E_n les ventes du bouquet « Éléance » au mois n .

1. Exprimer C_{n+1} et E_{n+1} en fonction de C_n et E_n .

$$C_{n+1} = 0,8 \times C_n + 0,3 \times E_n$$

$$E_{n+1} = 0,2 \times C_n + 0,7 \times E_n$$

2. En déduire la matrice A telle que

$$\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ E_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} C_n \\ E_n \end{pmatrix}$$

On peut réécrire le système sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ E_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n \\ E_n \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc égale à $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$

Quelques exemples de propriétés non vérifiées par les matrices :

Exemple :

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et

$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices $A \times B$ et $A \times C$.

Que remarque-t-on ?

$$A \times B = \begin{pmatrix} 24 & 20 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } A \times C = \begin{pmatrix} 24 & 20 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

On a donc $A \times B = A \times C$, mais $B \neq C$ (avec $A \neq O_2$).

Exemple :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer

$A \times B$ et $B \times A$. Que remarque-t-on ?

$$A \times B = O_2 \text{ et } B \times A = O_2.$$

Ainsi, il n'est pas vrai de dire que

$$A \times B = O_2 \implies A = O_2 \text{ ou } B = O_2$$

■ DÉFINITION :

On dit que l'ensemble des matrices a des **diviseurs de 0** non nuls (à droite et à gauche).

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3 .

$$A^2 = A \times A$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= O_3$$

On a $A^3 = O_3$, alors que $A^3 \neq O_3$.

■ DÉFINITION :

Soit A une matrice carrée de dimension n .

S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = O_n$, alors on dit que la matrice A est **nilpotente d'ordre k** .

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3 .

$$A^2 = A \times A$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -6 & -8 & -3 \\ 8 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -6 & -8 & -3 \\ 8 & 12 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= A$$

On a $A^3 = A$, alors que $A^3 \neq O_3$ et $A \neq I_3$.

■ DÉFINITION :

Soit A une matrice carrée de dimension n .

S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = A$, alors on dit que la matrice A est **idempotente d'ordre k** .

D. Inverse d'une matrice carrée (dite inversible)

■ DÉFINITION :

Si A est une matrice carrée de dimension n et s'il existe une matrice B telle $A \times B = B \times A = I_n$ où I_n est la matrice unité de dimension n , alors on dit que la matrice A est **inversible** et la matrice B est appelée **matrice inverse** de A et est notée A^{-1} .

■ DÉFINITION :

Si une matrice n'admet pas d'inverse, on dit qu'elle est **non inversible** ou **singulière**.

Remarque : On démontre, et nous l'admettons, qu'il suffit de prouver l'une des deux égalités (par exemple $A \times B = I_n$), l'autre égalité ($B \times A = I_n$) étant alors toujours vérifiée.

Remarque : On verra plus loin une formule donnant directement l'inverse d'une matrice carrée inversible 2×2 .

Pour les dimensions supérieures, le résultat sera donné par la calculatrice.

2. Applications

A. Résolution de systèmes linéaires

■ DÉFINITION :

Un **système linéaire de n équations à p inconnues** s'écrit :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où les $n \times p$ réels $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ sont donnés, ainsi que les n réels $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$. On cherche les p réels $(x_j)_{1 \leq j \leq p}$.

■ PROPRIÉTÉ :

$$\text{Avec } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ le système peut s'écrire}$$

$$M \times V = B$$

■ PROPRIÉTÉ :

Si la matrice M est carrée (i.e. si $n = p$) et si, de plus, M est inversible, alors la solution sera

$$V = M^{-1} \times B.$$

B. Le cas des matrices 2×2

Dans le cas d'une matrice de deux lignes et deux colonnes, de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, il est possible (et même préférable) de chercher si elle est inversible sans faire usage de la calculatrice. On forme pour cela son **déterminant**, noté :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Remarque : On reconnaîtra l'expression utilisée en Géométrie pour étudier la colinéarité de deux vecteurs.

■ PROPRIÉTÉ :

La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si

$$ad - bc \neq 0$$

Exemple :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-5) - 3 \times (-2) \\ &= -5 + 6 \\ &= -1 \end{aligned}$$

On a $\det(A) \neq 0$, donc A^{-1} existe et A est une matrice inversible.

■ PROPRIÉTÉ :

La matrice inverse de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est alors :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Remarque : Outre l'inverse du déterminant en facteur, la matrice obtenue permute les coefficients de la diagonale principale (a et d) et change les signes des coefficients de l'autre diagonale (b et c).

Exemple :

L'inverse de la matrice A précédente est donc

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$