

Séquence XIII – Nombres complexes (partie 1)

Exercices en autonomie - 2 juin 2025



Exercice 1

Déterminer le conjugué de chaque nombre complexe et donner sa forme algébrique.

- $z = (3 + i)(-13 - 2i)$
- $z = i(1 - i)^3$
- $z = \frac{2 - 3i}{8 + 5i}$
- $z = \frac{2}{i + 1} - \frac{3}{1 - i}$

Solution de l'exercice 1

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \overline{(3 + i)(-13 - 2i)} \\ &= (3 - i)(-13 + 2i) \\ &= -39 + 6i + 13i + 2 \\ &= -37 + 19i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \overline{i(1 - i)^3} \\ &= -i(1 + i)^3 \\ &= -i(1 + i)(1 + i)^2 \\ &= -i(1 + i)(1 + 2i - 1) \\ &= (-i + 1)(2i) \\ &= 2 + 2i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \overline{\left(\frac{2 - 3i}{8 + 5i}\right)} \\ &= \frac{2 + 3i}{8 - 5i} \\ &= \frac{2 + 3i}{8 - 5i} \times \frac{8 + 5i}{8 + 5i} \\ &= \frac{16 + 10i + 24i - 15}{8^2 + 5^2} \\ &= \frac{1 + 34i}{89}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \overline{\frac{2}{i + 1} - \frac{3}{1 - i}} \\ &= \overline{\left(\frac{2(1 - i) - 3(i + 1)}{(i + 1)(1 - i)}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{2 - 2i - 3i - 3}{1^2 + 1^2}\right)} \\ &= \frac{-1 - 5i}{2} \\ &= \frac{-1 + 5i}{2}\end{aligned}$$



Exercice 2

Mettre chaque nombre complexe sous sa forme algébrique.

- $z = \frac{2 + i}{3 + i}$
- $z = \frac{(2 + i)(1 - 4i)}{i + 1}$

Solution de l'exercice 2

$$\begin{aligned}z &= \frac{2 + i}{3 + i} \\ &= \frac{2 + i}{3 + i} \times \frac{3 - i}{3 - i} \\ &= \frac{6 - 2i + 3i + 1}{3^2 + 1^2} \\ &= \frac{7 + i}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z &= \frac{(2 + i)(1 - 4i)}{i + 1} \\ &= \frac{2 - 8i + i + 4}{i + 1} \\ &= \frac{6 - 7i}{i + 1} \times \frac{-i + 1}{-i + 1} \\ &= \frac{-6i + 6 - 7 - 7i}{1^2 + 1^2} \\ &= \frac{-1 - 13i}{2}\end{aligned}$$

Exercice 3

Soit $z = x + iy$, x et y étant deux réels tels que $(x; y) \neq (1; 0)$. On pose $Z = \frac{z + 2i}{z - 1}$. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tel que :

- Z soit un nombre réel (indice : il faut donc que la partie imaginaire de Z soit nulle... Il faut donc déterminer la partie imaginaire de Z en fonction de x et y , puis chercher la condition attendue...)
- Z soit un imaginaire pur (Indice : un raisonnement analogue, mais avec la partie réelle...).

Solution de l'exercice 3

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z + 2i}{z - 1} \\ &= \frac{x + iy + 2i}{x + iy - 1} \\ &= \frac{x + i(y + 2)}{x - 1 + iy} \\ &= \frac{x + i(y + 2)}{x - 1 + iy} \times \frac{x - 1 - iy}{x - 1 - iy} \\ &= \frac{x(x - 1) - ixy + i(y + 2)(x - 1) + y(y + 2)}{(x - 1)^2 + y^2} \\ &= \frac{x(x - 1) + y(y + 2) + i((y + 2)(x - 1) - xy)}{(x - 1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

- On veut que Z soit un nombre réel. Il faut donc que sa partie imaginaire soit nulle.

$$\text{Cela signifie donc que : } \frac{(y + 2)(x - 1) - xy}{(x - 1)^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow xy - y + 2x - 2 - xy = 0 \text{ et } (x; y) \neq (1; 0)$$

$$\Leftrightarrow 2x - y - 2 = 0 \text{ et } (x; y) \neq (1; 0)$$

L'ensemble des points tel que Z soit un nombre réel est donc la droite d'équation $2x - y - 2 = 0$ privée du point de coordonnées $(1; 0)$.

- On veut que Z soit un imaginaire pur. Il faut donc que sa partie réelle soit nulle.

$$\text{Cela signifie donc que : } \frac{x(x - 1) + y(y + 2)}{(x - 1)^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + 2y = 0 \text{ et } (x; y) \neq (1; 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y + 1)^2 - 1 = 0 \text{ et } (x; y) \neq (1; 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{4} \text{ et } (x; y) \neq (1; 0)$$

L'ensemble des points tel que Z soit un imaginaire pur est donc le cercle de centre $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ et de

rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point de coordonnées $(1; 0)$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes.

- $2z^2 - 6z + 5 = 0$
- $z^2 + z + 1 = 0$
- $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$

Solution de l'exercice 4

- $2z^2 - 6z + 5 = 0$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 5 = -4 < 0$$

L'équation possède donc deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{6 - i\sqrt{4}}{4} = \frac{3 - i}{2} \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = \frac{3 + i}{2}$$

- $z^2 + z + 1 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$

L'équation possède donc deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

- $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$

Attention, il ne s'agit pas d'une équation du second degré "classique". On doit donc passer par la forme algébrique de $z = x + iy$.

On obtient ainsi :

$$z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + iy)^2 + 2(x - iy) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy + 2x - 2iy + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2x + 1 + i(2xy - 2y) = 0$$

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \\ 2xy - 2y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 - y^2 = 0 \\ 2y(x - 1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 - y^2 = 0 \\ y = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $y = 0$ alors en remplaçant dans la première équation, on trouve $(x + 1)^2 = 0$ soit $x = -1$.

Si $x = 1$ alors en remplaçant dans la première équation, on trouve $4 - y^2 = 0$ soit $y = 2$ ou $y = -2$.

Les solutions de l'équation sont donc : -1 , $1 + 2i$ et $1 - 2i$.



Exercice 5

- On considère un réel b . Développer $(z^2 + bz + 4)(z^2 - bz + 4)$.
- En déduire les solutions complexes de l'équation $z^4 + 16 = 0$.

Solution de l'exercice 5

•

$$\begin{aligned} & (z^2 + bz + 4)(z^2 - bz + 4) \\ &= z^4 - bz^3 + 4z^2 + bz^3 - b^2z^2 + 4bz + 4z^2 - 4bz + 16 \\ &= z^4 + (8 - b^2)z^2 + 16 \end{aligned}$$

- Posons $b = 2\sqrt{2}$ alors $b^2 = 8$.

Ainsi, d'après la question précédente,

$$(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4) = z^4 + 16$$

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, un des facteurs au moins est nul.

Donc

$$\begin{aligned} z^4 + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 &= 0 \text{ ou } z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0 \end{aligned}$$

- Pour $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

$$\Delta = -8 < 0$$

Il y a donc deux solutions complexes :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-2\sqrt{2} - i\sqrt{8}}{2} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \text{ et} \\ z_2 &= \bar{z}_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \end{aligned}$$

- Pour $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

$$\Delta = -8 < 0$$

Il y a donc deux solutions complexes :

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{2\sqrt{2} - i\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \text{ et} \\ z_4 &= \bar{z}_3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $z^4 + 16 = 0$ sont donc

$$-\sqrt{2} - i\sqrt{2}, -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \sqrt{2} - i\sqrt{2} \text{ et } \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$



Exercice 6

Pour tout nombre complexe z on pose

$$P(z) = z^4 - 1$$

- Factoriser $P(z)$.
- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$

Solution de l'exercice 6

- On a

$$\begin{aligned} z^4 - 1 &= (z^2)^2 - 1^2 \\ &= (z^2 - 1)(z^2 + 1) \\ &= (z - 1)(z + 1)(z^2 + 1) \end{aligned}$$

- Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un de ses facteurs au moins est nul.

Donc

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\Leftrightarrow z - 1 = 0 \text{ ou } z + 1 = 0 \text{ ou } z^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -1 \text{ ou } z^2 = -1 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont donc -1 , 1 , i et $-i$.

- Si on pose $Z = \frac{2z+1}{z-1}$ l'équation $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ est équivalente à $P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z = 1$ ou $Z = -1$ ou $Z = i$ ou $Z = -i$.

Soit $a \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} Z = a &\Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1} = a \\ &\Leftrightarrow 2z+1 = a(z-1) \text{ et } z \neq 1 \\ &\Leftrightarrow 2z+1 = az - a \text{ et } z \neq 1 \\ &\Leftrightarrow (2-a)z = -1-a \text{ et } z \neq 1 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-1-a}{2-a} \text{ et } z \neq 1 \end{aligned}$$

Par conséquent $Z = 1 \Leftrightarrow z = -2$

$$Z = -1 \Leftrightarrow z = 0$$

$$Z = i \Leftrightarrow z = \frac{-1-i}{2-i} \Leftrightarrow z = \frac{-1-3i}{5}$$

$$Z = -i \Leftrightarrow z = \frac{-1+i}{2-(-i)} \Leftrightarrow z = \frac{-1+3i}{5}$$

Les solutions de l'équation initiale sont donc

$$-2, 0, \frac{-1-3i}{5} \text{ et } \frac{-1+3i}{5}$$



Exercice 7

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : z^3 - (1 - i)z^2 + (1 - i)z + i = 0$$

- Montrer que (E) possède une unique solution imaginaire pure.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Les solutions de (E) sont donc

$$-i, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Solution de l'exercice 7

- Soit $y \in \mathbb{R}$ alors iy est un imaginaire pur.

Supposons que iy soit une solution de (E) .

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 iy \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow (iy)^3 - (1 - i)(iy)^2 + (1 - i)iy + i = 0 \\
 &\Leftrightarrow -iy^3 - (1 - i) \times (-y^2) + iy + y + i = 0 \\
 &\Leftrightarrow -iy^3 + y^2 - iy^2 + iy + y + i = 0 \\
 &\Leftrightarrow y^2 + y + i(1 + y - y^2 - y^3) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y(y + 1) = 0 \\ 1 + y - y^2 - y^3 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } y = -1 \\ 1 + y - y^2 - y^3 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

0 n'est pas solution de l'équation $1 + y - y^2 - y^3 = 0$

-1 est solution de l'équation $1 + y - y^2 - y^3 = 0$.

Par conséquent la seule solution imaginaire pure possible est $-i$

Vérifions que $-i$ est bien solution de (E)

$$\begin{aligned}
 &(-i)^3 - (1 - i)(-i)^2 + (1 - i)(-i) + i \\
 &= i + 1 - i - i - 1 + i \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Donc $-i$ est l'unique solution imaginaire pure de l'équation (E) .

- Puisque $-i$ est solution de (E) on peut factoriser le polynôme par $(z + i)$.

On cherche donc les nombres complexes a et b tels que :

$$(z + i)(z^2 + az + b) = z^3 - (1 - i)z^2 + (1 - i)z + i$$

$$\begin{aligned}
 (z + i)(z^2 + az + b) &= z^3 + az^2 + bz + iz^2 + aiz + bi \\
 &= z^3 + (a + i)z^2 + (b + ai)z + bi
 \end{aligned}$$

Par identification on a donc $a = -1$ et $b = 1$

$$\text{Ainsi } (E) \Leftrightarrow (z + i)(z^2 - z + 1) = 0$$

On considère l'équation $z^2 - z + 1 = 0$

$$\Delta = -3 < 0$$

Il y a donc deux solutions complexes :

