

Séquence XIII – Nombres complexes (partie 1)



Exercice 1

Calculer $(2i)^2$, $(-5i)^3$, $(1+i)^2$ et $(1+2i)(2-i)$ grâce aux règles de calcul de $\mathbb{R}$ et le fait que $i^2 = -1$.

Solution de l'exercice 1

$$\begin{aligned}(2i)^2 &= 2^2 \times i^2 \\ &= 4 \times (-1) \\ &= -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-5i)^3 &= (-5)^3 \times i^3 \\ &= -125 \times i^3 \\ &= -125 \times i^2 \times i \\ &= -125 \times (-1) \times i \\ &= 125i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+i)^2 &= (1+i)(1+i) \\ &= (1)^2 + 2 \times (1) \times i + i^2 \\ &= 1 + 2i - 1 \\ &= 2i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+2i)(2-i) &= 1 \times 2 + 1 \times (-i) + 2i \times 2 + 2i \times (-i) \\ &= 2 - i + 4i - 2i^2 \\ &= 2 - i + 4i - 2(-1) \\ &= 2 - i + 4i + 2 \\ &= 4 + 3i\end{aligned}$$



Exercice 2

Résoudre les équations :

$$x^2 + 4 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - 4x + 13 = 0.$$

Solution de l'exercice 2

$$\begin{aligned}x^2 + 4 = 0 &\iff x^2 - (-4) = 0 \\ &\iff x^2 - (2i)^2 = 0 \\ &\iff (x - 2i)(x + 2i) = 0 \\ &\iff x - 2i = 0 \text{ ou } x + 2i = 0 \\ &\iff x = 2i \text{ ou } x = -2i\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{-2i; 2i\}$.

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 13 = 0 &\iff x^2 - 4x + 4 - 4 + 13 = 0 \\ &\iff (x - 2)^2 + 9 = 0 \\ &\iff (x - 2)^2 - (-9) = 0 \\ &\iff (x - 2)^2 - (3i)^2 = 0 \\ &\iff (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) = 0 \\ &\iff x - 2 - 3i = 0 \text{ ou } x - 2 + 3i = 0 \\ &\iff x = 2 + 3i \text{ ou } x = 2 - 3i\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{2 - 3i; 2 + 3i\}$.



Exercice 3

Calculer, selon les valeurs de l'entier relatif n , les valeurs de i^n , puis de $S = i^{2022} + i^{2023} + i^{2024} + i^{2025}$.

Solution de l'exercice 3

On sait que

- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1$

Donc i^n prend cycliquement les valeurs $i, -1, -i, 1$ selon que n est de la forme $4k, 4k+1, 4k+2$ ou $4k+3$, où $k \in \mathbb{Z}$.

- Pour i^{2022} , on a $2016 = 504 \times 4 + 2$, donc

$$i^{2022} = i^2 = -1$$

- Pour i^{2023} , on a $2016 = 504 \times 4 + 3$, donc

$$i^{2023} = i^3 = -i$$

- Pour i^{2024} , on a $2016 = 504 \times 4 + 0$, donc

$$i^{2024} = i^0 = 1$$

- Pour i^{2025} , on a $2016 = 504 \times 4 + 1$, donc

$$i^{2025} = i^1 = i$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}S &= i^{2022} + i^{2023} + i^{2024} + i^{2025} \\ &= -1 - i + 1 + i \\ &= 0\end{aligned}$$



Exercice 4

1. Calculer

- $z = 2(6 - 5i) - 3(4 + i)$
- $z' = (3 - 4i) \times (5 + 7i)$
- $z'' = (\sqrt{2} - 3i)^2$

2. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calculer j^2, j^3 et $1 + j + j^2$.

Solution de l'exercice 4

$$\begin{aligned}z &= 2(6 - 5i) - 3(4 + i) \\&= 12 - 10i - 12 - 3i \\&= 0 - 13i \\&= -13i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z' &= (3 - 4i) \times (5 + 7i) \\&= 3 \times 5 + 3 \times 7i - 4i \times 5 - 4i \times 7i \\&= 15 + 21i - 20i - 28i^2 \\&= 15 + 21i - 20i - 28(-1) \\&= 15 + 21i - 20i + 28 \\&= 43 + i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z'' &= (\sqrt{2} - 3i)^2 \\&= (\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 3i + (3i)^2 \\&= 2 - 6i\sqrt{2} + 9i^2 \\&= 2 - 6i\sqrt{2} + 9(-1) \\&= 2 - 6i\sqrt{2} - 9 \\&= -7 - 6i\sqrt{2}\end{aligned}$$

• Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}j^2 &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\&= \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\&= \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i^2 \\&= \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \\&= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}j^3 &= j^2 \times j \\&= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\&= \frac{1}{4} - i^2 \times \frac{3}{4} \\&= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\&= 1\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}1 + j + j^2 &= 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\&= 0\end{aligned}$$

Remarque : On pourra remarquer que $j^2 = \bar{j}$, ou encore

$$\begin{aligned}j^2 &= -1 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\&= -1 - j\end{aligned}$$

ce qui rend les calculs suivants beaucoup plus élégants :

$$\begin{aligned}j^3 &= j^2 \times j \\&= (-j - 1) \times j \\&= -j^2 - j \\&= -(j^2 + j) \\&= -(-1) \\&= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 + j + j^2 &= 1 + j + (-j - 1) \\&= 0\end{aligned}$$



Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, si $z = a + ib$ est l'abscisse du point $M(a; b)$, déterminer (à l'aide d'une figure) les abscisses de :

- M_1 , symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses,
- M_2 , symétrique de M par rapport à O ,
- M_3 , symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées,
- M_4 , symétrique de M par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Solution de l'exercice 5

Soit $z = a + ib$ l'abscisse du point $M(a; b)$, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

- Pour M_1 , symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses. Les coordonnées de M_1 sont $(a; -b)$ donc son abscisse est $z_1 = a - ib = \bar{z}$
- Pour M_2 , symétrique de M par rapport à O . Les coordonnées de M_2 sont $(-a; -b)$ donc son abscisse est $z_2 = -a - ib = -z$
- Pour M_3 , symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées. Les coordonnées de M_3 sont $(-a; b)$ donc son abscisse est $z_3 = -a + ib = -\bar{z}$
- Pour M_4 , symétrique de M par rapport à la droite d'équation $y = x$. Les coordonnées de M_4 sont $(b; a)$ donc son abscisse est $z_4 = b + ia = i\bar{z}$.



Exercice 6

Montrer que l'équation :

$$z^3 + (2i - 1)z^2 + (3 - 2i)z + 6i = 0$$

admet une solution imaginaire pure, à déterminer.

Solution de l'exercice 6

Cherchons une solution de la forme $z = ib$ où b est un réel.

Substituons dans l'équation :

$$(ib)^3 + (2i - 1)(ib)^2 + (3 - 2i)(ib) + 6i = 0$$

Développons :

$$i^3b^3 + (2i - 1)i^2b^2 + (3 - 2i)ib + 6i = 0$$

$$\iff -ib^3 + (2i - 1)(-b^2) + 3ib - 2i^2b + 6i = 0$$

$$\iff -ib^3 - 2ib^2 + b^2 + 3ib + 2b + 6i = 0$$

Regroupons les termes réels et regroupons les termes imaginaires :

$$(b^2 + 2b) + i(-b^3 - 2b^2 + 3b + 6) = 0$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, on doit avoir :

$$\begin{cases} b^2 + 2b = 0 \\ -b^3 - 2b^2 + 3b + 6 = 0 \end{cases}$$

De la première équation, on obtient $b = 0$ ou $b = -2$.

- Pour $b = 0$:

$$\begin{aligned} -0^3 - 2(0)^2 + 3(0) + 6 &= 6 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

donc $b = 0$ n'est pas solution.

- Pour $b = -2$:

$$\begin{aligned} &-(-2)^3 - 2(-2)^2 + 3(-2) + 6 \\ &= -(-8) - 2(4) + (-6) + 6 \\ &= 8 - 8 - 6 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $z = -2i$ est une solution de l'équation.

$$\mathcal{S} = \{-2i\}$$



Exercice 7

Déterminer les formes algébriques de $z_1 = \frac{1}{i}$,

$$z_2 = \frac{1}{2 + 3i}; z_3 = \frac{1}{2i - 5} \text{ et } z_4 = \frac{3 + 2i}{2 - i}.$$

Solution de l'exercice 7

Calcul de $z_1 = \frac{1}{i}$

Pour déterminer la forme algébrique de z_1 , on multiplie le numérateur et le dénominateur par $-i$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{i} \times \frac{-i}{-i} \\ &= \frac{-i}{i \times (-i)} \\ &= \frac{-i}{-i^2} \end{aligned}$$

Or, $i^2 = -1$, donc $-i^2 = 1$. On obtient :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-i}{1} \\ &= -i \end{aligned}$$

Calcul de $z_2 = \frac{1}{2 + 3i}$

Pour déterminer la forme algébrique de z_2 , on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur, soit $2 - 3i$:

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1}{2 + 3i} \\ &= \frac{1}{2 + 3i} \times \frac{2 - 3i}{2 - 3i} \\ &= \frac{2 - 3i}{(2 + 3i)(2 - 3i)} \end{aligned}$$

Le dénominateur devient :

$$\begin{aligned} (2 + 3i)(2 - 3i) &= 4 - 6i + 6i - 9i^2 \\ &= 4 - 9(-1) \\ &= 4 + 9 \\ &= 13 \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{2 - 3i}{13} \\ &= \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i \end{aligned}$$

Calcul de $z_3 = \frac{1}{2i - 5}$

Attention ! La forme algébrique de $2i - 5$ est inversé !
Pour déterminer la forme algébrique de z_3 , on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur, soit $-2i - 5$:

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{1}{2i - 5} \\ &= \frac{1}{2i - 5} \times \frac{-2i - 5}{-2i - 5} \\ &= \frac{-2i - 5}{(2i - 5)(-2i - 5)} \end{aligned}$$

Le dénominateur devient :

$$\begin{aligned}(2i - 5)(-2i - 5) &= -4i^2 - 10i + 10i + 25 \\ &= -4(-1) + 25 \\ &= 4 + 25 \\ &= 29\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}z_3 &= \frac{-2i - 5}{29} \\ &= -\frac{5}{29} - \frac{2}{29}i\end{aligned}$$

Calcul de $z_4 = \frac{3 + 2i}{2 - i}$

Pour déterminer la forme algébrique de z_4 , on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur, soit $2 + i$:

$$\begin{aligned}z_4 &= \frac{3 + 2i}{2 - i} \\ &= \frac{3 + 2i}{2 - i} \times \frac{2 + i}{2 + i} \\ &= \frac{(3 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)}\end{aligned}$$

Le numérateur devient :

$$\begin{aligned}(3 + 2i)(2 + i) &= 6 + 3i + 4i + 2i^2 \\ &= 6 + 7i + 2(-1) \\ &= 6 + 7i - 2 \\ &= 4 + 7i\end{aligned}$$

Le dénominateur devient :

$$\begin{aligned}(2 - i)(2 + i) &= 4 + 2i - 2i - i^2 \\ &= 4 - (-1) \\ &= 4 + 1 \\ &= 5\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}z_4 &= \frac{4 + 7i}{5} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i\end{aligned}$$

Conclusion

Les formes algébriques des nombres complexes sont :

$$\begin{aligned}z_1 &= -i \\ z_2 &= \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i \\ z_3 &= -\frac{5}{29} - \frac{2}{29}i \\ z_4 &= \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i\end{aligned}$$



Exercice 8

Soit $P(z) = 3z^3 + 10z^2 + 3z + 10$ où $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que le polynôme P admet deux racines imaginaires pures.
2. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$ et la factorisation de $P(z)$ en produit de facteurs du premier degré.
3. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P(z) = 0$ et la factorisation de $P(z)$ en un produit de deux polynômes à coefficients réels.

Solution de l'exercice 8

1. Cherchons si le polynôme $P(z) = 3z^3 + 10z^2 + 3z + 10$ admet des racines imaginaires pures de la forme $z = ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$.

Calculons $P(ib)$:

$$\begin{aligned}P(ib) &= 3(ib)^3 + 10(ib)^2 + 3(ib) + 10 \\ &= 3i^3b^3 + 10i^2b^2 + 3ib + 10 \\ &= -3ib^3 - 10b^2 + 3ib + 10 \\ &= -10b^2 + 10 + ib(3 - 3b^2)\end{aligned}$$

Pour que ib soit racine, on doit avoir $P(ib) = 0$, donc :

$$\begin{cases} -10b^2 + 10 &= 0 \\ 3 - 3b^2 &= 0 \end{cases}$$

De la seconde équation, on tire $b^2 = 1$, donc $b = 1$ ou $b = -1$. Vérifions avec la première équation :

$$-10 \times 1^2 + 10 = 0 \quad \text{et} \quad -10 \times (-1)^2 + 10 = 0$$

Donc $P(z)$ admet bien deux racines imaginaires pures : $z = i$ et $z = -i$.

2. Comme $P(i) = P(-i) = 0$, on sait que $P(z)$ est divisible par $(z - i)(z + i) = z^2 + 1$. Effectuons la division euclidienne : $P(z) = (z^2 + 1)Q(z) + R(z)$ où $\deg(R) < 2$.

On peut calculer $Q(z)$ par identification ou division polynomiale :

$$\begin{aligned}P(z) &= 3z^3 + 10z^2 + 3z + 10 \\ &= (z^2 + 1)(3z + 10)\end{aligned}$$

Donc $P(z) = (z^2 + 1)(3z + 10)$

Les racines de $P(z)$ sont donc i , $-i$ et $-\frac{10}{3}$.

3. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(z) = 0$ admet une seule solution réelle : $z = -\frac{10}{3}$.

La factorisation de $P(z)$ en produit de polynômes à coefficients réels est :

$$P(z) = (z^2 + 1)(3z + 10)$$

où $(z^2 + 1)$ correspond au produit des facteurs $(z - i)(z + i)$ et ne se factorise pas davantage dans $\mathbb{R}$.



Exercice 9

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ où $z \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$, un polynôme à coefficients $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ réels.
Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine du polynôme P , alors $\bar{\alpha}$ l'est aussi.

Solution de l'exercice 9 On considère un polynôme à coefficients réels

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

où $z \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$.

Supposons que $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de $P(z)$, c'est-à-dire

$$P(\alpha) = 0$$

Cela signifie que :

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

Prenons le conjugué de chaque membre de cette égalité :

$$\overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0} = \bar{0}$$

Comme les coefficients a_k sont réels,

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \overline{a_k} = a_k$$

De plus,

$$\overline{\alpha^k} = \bar{\alpha}^k$$

Ainsi :

$$a_n \bar{\alpha}^n + a_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{\alpha} + a_0 = 0$$

Ce qui signifie que

$$P(\bar{\alpha}) = 0$$

donc $\bar{\alpha}$ est également une racine de $P(z)$.

Ce résultat est important car il montre que les racines complexes non réelles d'un polynôme à coefficients réels viennent toujours par paires conjuguées.



Exercice 10

Calculer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de :

a) $c = \pi - 3$

d) $c = -24 - 70i$

b) $c = 3 - \pi$

c) $c = -3 + 4i$

e) $c = -85 - 132i$

Solution de l'exercice 10

a) $c = \pi - 3$

$\pi - 3 > 0$ donc les racines carrées sont :

$$\pm \sqrt{\pi - 3}$$

b) $c = 3 - \pi$

$3 - \pi < 0$, il s'agit d'un nombre réel négatif, donc les racines carrées sont :

$$\pm i \sqrt{\pi - 3}$$

c) $c = -3 + 4i$

Posons $r = x + iy$, avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, une racine carrée de c . Alors $r^2 = c$ est équivalent à $(x + iy)^2 = -3 + 4i$, ou encore $x^2 - y^2 + 2ixy = -3 + 4i$

Par identification :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

De plus,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Réolvons le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Par addition des deux premières lignes, $2x^2 = 2$, donc $x^2 = 1$, d'où $x = \pm 1$ Ensuite $y^2 = 5 - x^2 = 5 - 1 = 4$, donc $y = \pm 2$

Comme $xy = 2$, on a soit $(x; y) = (1; 2)$, soit $(x; y) = (-1; -2)$

Les racines carrées de $-3 + 4i$ sont donc $1 + 2i$ et $-1 - 2i$

d) $c = -24 - 70i$

Posons $r = x + iy$, avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, une racine carrée de c .

Par identification :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -24 \\ 2xy = -70 \end{cases}$$

De plus

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \sqrt{(-24)^2 + (-70)^2} \\ &= \sqrt{576 + 4900} \\ &= \sqrt{5476} \\ &= 74 \end{aligned}$$

$$\text{Résolvons : } \begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ x^2 - y^2 = -24 \\ xy = -35 \end{cases}$$

Par addition des deux premières lignes, $2x^2 = 50$, donc $x^2 = 25$, d'où $x = \pm 5$.

Ensuite $y^2 = 74 - x^2 = 74 - 25 = 49$, donc $y = \pm 7$.

Comme $xy = -35$, on a soit $(x; y) = (5; -7)$, soit $(x; y) = (-5; 7)$

Les racines carrées de $-24 - 70i$ sont donc $5 - 7i$ et $-5 + 7i$

e) $c = -85 - 132i$

Posons $r = x + iy$, avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, une racine carrée de c . Par identification :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -85 \\ 2xy = -132 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \sqrt{(-85)^2 + (-132)^2} \\ &= \sqrt{7\,225 + 17\,424} \\ &= \sqrt{24\,649} \\ &= 157 \end{aligned}$$

$$\text{Résolvons : } \begin{cases} x^2 + y^2 = 157 \\ x^2 - y^2 = -85 \\ xy = -66 \end{cases}$$

Par addition des deux premières lignes : $2x^2 = 72$, donc $x^2 = 36$, d'où $x = \pm 6$.

Ensuite $y^2 = 157 - x^2 = 157 - 36 = 121$, donc $y = \pm 11$.

Comme $xy = -66$, on a soit $(x; y) = (6; -11)$, soit $(x; y) = (-6; 11)$

Les racines carrées de $-85 - 132i$ sont donc $6 - 11i$ et $-6 + 11i$.



Exercice 11

Résoudre les équations :

a) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$.

b) $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$.

c) $(4 + 2i)z^2 - 2(3 + 2i)z + 2 - i = 0$.

d) $2z^2 + 3z + 7 = 0$.

e) $z^3 - (2 + 3i)z^2 + (-1 + 4i)z + 2 - i = 0$.

Pour la dernière équation, on pourra chercher une solution imaginaire pure très simple...

Calculons une racine carrée de $\Delta = 9 - 40i$.

Posons $\delta = x + iy$, avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\delta^2 = 9 - 40i$.

Ainsi $(x + iy)^2 = 9 - 40i$, c'est-à-dire

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 9 - 40i$$

Par identification :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ 2xy = -40 \end{cases}$$

De plus,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \sqrt{9^2 + (-40)^2} \\ &= \sqrt{81 + 1600} \\ &= \sqrt{1681} \\ &= 41 \end{aligned}$$

Résolvons :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \\ xy = -20 \end{cases}$$

Par addition des deux premières lignes : $2x^2 = 50$, donc $x^2 = 25$, d'où $x = \pm 5$.

Ensuite $y^2 = 41 - x^2 = 41 - 25 = 16$, donc $y = \pm 4$

Comme $xy = -20$, on a soit $(x; y) = (5; -4)$, soit $(x; y) = (-5; 4)$

Choisissons $\delta = 5 - 4i$. Les solutions sont :

$$\begin{aligned} \bullet \quad z_1 &= \frac{5 + (5 - 4i)}{2} = \frac{10 - 4i}{2} = 5 - 2i \\ \bullet \quad z_2 &= \frac{5 - (5 - 4i)}{2} = \frac{0 + 4i}{2} = 2i \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{2i; 5 - 2i\}$.

b) On a $a = 4$, $b = -16$, $c = 11 - 12i$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-16)^2 - 4 \times 4 \times (11 - 12i) \\ &= 256 - 176 + 192i \\ &= 80 + 192i \end{aligned}$$

Calculons une racine carrée de $\Delta = 80 + 192i$:

Posons $\delta = x + iy$, avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\delta^2 = 80 + 192i$

Par identification :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 80 \\ 2xy = 192 \end{cases}$$

Solution de l'exercice 11

a) On a $a = 1$, $b = -5$, $c = 4 + 10i$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-5)^2 - 4 \times 1 \times (4 + 10i) \\ &= 25 - 16 - 40i \\ &= 9 - 40i \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= \sqrt{(80)^2 + (192)^2} \\
 &= \sqrt{6400 + 36864} \\
 &= \sqrt{43264} \\
 &= \sqrt{16 \times 2704} \\
 &= 4\sqrt{2704} \\
 &= 4 \times 52 \\
 &= 208
 \end{aligned}$$

Réolvons :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ x^2 - y^2 = 80 \\ xy = 96 \end{cases}$$

Par addition : $2x^2 = 208 + 80 = 288$, donc

$$x^2 = 144$$

Par soustraction : $2y^2 = 208 - 80 = 128$, donc

$$y^2 = 64$$

De $xy = 96$, on déduit que si $x > 0$ alors $y > 0$.

Donc une racine carrée est $\delta = 12 + 8i$.

Les solutions sont :

$$\begin{aligned}
 \bullet z_1 &= \frac{16 + (12 + 8i)}{2 \times 4} = \frac{28 + 8i}{8} = \frac{7 + 2i}{2} \\
 \bullet z_2 &= \frac{16 - (12 + 8i)}{2 \times 4} = \frac{4 - 8i}{8} = \frac{1 - 2i}{2}
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{7}{2} + i; \frac{1}{2} - i \right\}$

c) On a $a = 4 + 2i$, $b = -2(3 + 2i) = -6 - 4i$, $c = 2 - i$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4ac = (-6 - 4i)^2 - 4(4 + 2i)(2 - i) \\
 &= 36 + 48i + 16i^2 - 4(8 - 4i + 4i - 2i^2) \\
 &= 36 + 48i - 16 - 4(8 + 0 - 2(-1)) \\
 &= 20 + 48i - 4(8 + 2) \\
 &= 20 + 48i - 4(10) \\
 &= 20 + 48i - 40 \\
 &= -20 + 48i
 \end{aligned}$$

Calculons une racine carrée de $\Delta = -20 + 48i$.

Posons $\delta = x + iy$, avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\delta^2 = -20 + 48i$

Par identification : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -20 \\ 2xy = 48 \end{cases}$

De plus,

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= \sqrt{(20)^2 + (48)^2} \\
 &= \sqrt{400 + 2304} \\
 &= \sqrt{2704} \\
 &= 52
 \end{aligned}$$

Réolvons :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ x^2 - y^2 = -20 \\ xy = 24 \end{cases}$$

Par addition : $2x^2 = 32$, donc $x^2 = 16$, et ainsi $x = \pm 4$. Par soustraction : $2y^2 = 72$, donc

$$y^2 = 36$$

et ainsi $y \pm 6$.

Comme $xy = 24$, donc une racine carrée est :

$$\delta = 4 + 6i$$

Les solutions sont :

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \frac{6 + 4 + 6i}{2(4 + 2i)} \\
 &= \frac{10 + 6i}{8 + 4i} \\
 &= \frac{5 + 5i}{4 + 2i} \\
 &= \frac{(5 + 5i)(4 - 2i)}{16 + 4} \\
 &= \frac{20 - 10i + 20i + 10}{20} \\
 &= \frac{30 + 10i}{20} \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{i}{2}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \frac{6 - 4 - 6i}{2(4 + 2i)} \\
 &= \frac{2 - 6i}{8 + 4i} \\
 &= \frac{1 - 3i}{4 + 2i} \\
 &= \frac{(1 - i)(4 - 2i)}{16 + 4} \\
 &= \frac{4 - 2i - 4i - 2}{20} \\
 &= \frac{2 - 6i}{20} \\
 &= \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{2} + \frac{i}{2}; \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i \right\}$.

d) On a $a = 2$, $b = 3$, $c = 7$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4ac \\
 &= 3^2 - 4 \times 2 \times 7 \\
 &= 9 - 56 \\
 &= -47 \\
 &= (i\sqrt{47})^2
 \end{aligned}$$

Comme Δ est réel négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

Les solutions sont :

$$\begin{aligned} \bullet \quad z_1 &= \frac{-3 + i\sqrt{47}}{2 \times 2} = \frac{-3 + i\sqrt{47}}{4} \\ \bullet \quad z_2 &= \frac{-3 - i\sqrt{47}}{2 \times 2} = \frac{-3 - i\sqrt{47}}{4} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-3 - i\sqrt{47}}{4}; \frac{-3 + i\sqrt{47}}{4} \right\}$.

e) $z^3 - (2 + 3i)z^2 + (-1 + 4i)z + 2 - i = 0$

Pour pouvoir résoudre cette équation du troisième degré, nous devons espérer trouver une racine « évidente », puis factoriser le polynôme.

Vérifions si $z = 1$ est une racine :

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 - (2 + 3i) \times 1^2 + (-1 + 4i) \times 1 + (2 - i) \\ &= 1 - 2 - 3i - 1 + 4i + 2 - i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc 1 est bien une racine.

On peut factoriser par $(z - 1)$:

$$z^3 - (2 + 3i)z^2 + (-1 + 4i)z + (-2 + i) = (z - 1)Q(z)$$

Par division, on trouve :

$$Q(z) = z^2 - (1 + 3i)z + (2 - i)$$

Résolvons maintenant $Q(z) = 0$:

On a $a = 1$, $b = -(1 + 3i)$, $c = 2 - i$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-(1 + 3i))^2 - 4 \times 1 \times (-2 + i) \\ &= (1 + 3i)^2 - 4(-2 + i) \\ &= 1 + 6i - 9 + 8 - 4i \\ &= 2i \end{aligned}$$

Or, on a vu précédemment que $2i = (1 + i)^2$ (cf exercice 1). Les solutions de $Q(z) = 0$ sont :

$$\begin{aligned} \bullet \quad z'_1 &= \frac{1 + 3i + 1 + i}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i \\ \bullet \quad z'_2 &= \frac{1 + 3i - 1 - i}{2} = \frac{2i}{2} = i \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation initiale sont donc

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= 1 + 2i \\ z_3 &= i \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{1; i; 1 + 2i\}$.



Exercice 12

Démontrer que, pour tout $(z; z') \in \mathbb{C}^2$:

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$ avec z' non nul
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ avec z' non nul
- $\overline{(z)^n} = (\bar{z})^n$, avec n entier relatif

Solution de l'exercice 12

- Montrons que $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$.

Calculons $z + z'$:

$$\begin{aligned} z + z' &= (a + ib) + (a' + ib') \\ &= (a + a') + i(b + b') \end{aligned}$$

Prenons maintenant le conjugué de cette somme :

$$\begin{aligned} \overline{z + z'} &= \overline{(a + a') + i(b + b')} \\ &= (a + a') - i(b + b') \end{aligned}$$

D'autre part, calculons $\bar{z} + \bar{z}'$:

$$\begin{aligned} \bar{z} + \bar{z}' &= (a - ib) + (a' - ib') \\ &= (a + a') - i(b + b') \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \overline{z + z'} &= (a + a') - i(b + b') \\ &= \bar{z} + \bar{z}' \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

- Montrons que $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

Calculons $z \times z'$:

$$\begin{aligned} z \times z' &= (a + ib) \times (a' + ib') \\ &= a \times a' + a \times ib' + ib \times a' + ib \times ib' \\ &= aa' + ia'b + iab' + i^2bb' \\ &= aa' + i(a'b + ab') + i^2bb' \end{aligned}$$

Or $i^2 = -1$, donc :

$$\begin{aligned} z \times z' &= aa' + i(a'b + ab') - bb' \\ &= (aa' - bb') + i(a'b + ab') \end{aligned}$$

Prenons maintenant le conjugué de ce produit :

$$\begin{aligned} \overline{z \times z'} &= \overline{(aa' - bb') + i(a'b + ab')} \\ &= (aa' - bb') - i(a'b + ab') \end{aligned}$$

D'autre part, calculons $\bar{z} \times \bar{z}'$:

$$\begin{aligned}\bar{z} \times \bar{z}' &= (a - ib) \times (a' - ib') \\ &= a \times a' - a \times ib' - ib \times a' + ib \times ib' \\ &= aa' - ia'b - iab' + i^2bb' \\ &= aa' - i(a'b + ab') + i^2bb' \\ &= aa' - i(a'b + ab') - bb' \\ &= (aa' - bb') - i(a'b + ab')\end{aligned}$$

En comparant les deux résultats, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\overline{z \times z'} &= (aa' - bb') - i(a'b + ab') \\ &= \bar{z} \times \bar{z}'\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

- Montrons que $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$ avec z' non nul

Pour démontrer cette propriété, commençons par exprimer $\frac{1}{z'}$ sous forme algébrique :

$$\begin{aligned}\frac{1}{z'} &= \frac{1}{a' + ib'} \\ &= \frac{a' - ib'}{(a' + ib')(a' - ib')} \\ &= \frac{a' - ib'}{(a')^2 + (b')^2} \\ &= \frac{a'}{(a')^2 + (b')^2} - i \frac{b'}{(a')^2 + (b')^2}\end{aligned}$$

Prenons maintenant le conjugué de cette expression :

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} &= \overline{\left(\frac{a'}{(a')^2 + (b')^2} - i \frac{b'}{(a')^2 + (b')^2}\right)} \\ &= \frac{a'}{(a')^2 + (b')^2} + i \frac{b'}{(a')^2 + (b')^2}\end{aligned}$$

D'autre part, calculons $\frac{1}{\bar{z}'}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{z}'} &= \frac{1}{a' - ib'} \\ &= \frac{a' + ib'}{(a' - ib')(a' + ib')} \\ &= \frac{a' + ib'}{(a')^2 + (b')^2} \\ &= \frac{a'}{(a')^2 + (b')^2} + i \frac{b'}{(a')^2 + (b')^2}\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} &= \frac{a'}{(a')^2 + (b')^2} + i \frac{b'}{(a')^2 + (b')^2} \\ &= \frac{1}{\bar{z}'}\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer

- Montrons que $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ avec z' non nul

Commençons par calculer $\frac{z}{z'}$:

$$\begin{aligned}\frac{z}{z'} &= \frac{a + ib}{a' + ib'} \\ &= \frac{(a + ib)(a' - ib')}{(a' + ib')(a' - ib')} \\ &= \frac{aa' - aib' + iba' - i^2bb'}{(a')^2 + (b')^2} \\ &= \frac{aa' + bb' + i(ba' - ab')}{(a')^2 + (b')^2}\end{aligned}$$

Prenons le conjugué de cette expression :

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \overline{\left(\frac{aa' + bb' + i(ba' - ab')}{(a')^2 + (b')^2}\right)} \\ &= \frac{aa' + bb' - i(ba' - ab')}{(a')^2 + (b')^2}\end{aligned}$$

Calculons maintenant $\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{z}}{\bar{z}'} &= \frac{a - ib}{a' - ib'} \\ &= \frac{(a - ib)(a' + ib')}{(a' - ib')(a' + ib')} \\ &= \frac{aa' + aib' - iba' - i^2bb'}{(a')^2 + (b')^2} \\ &= \frac{aa' + bb' - i(ba' - ab')}{(a')^2 + (b')^2}\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \frac{aa' + bb' - i(ba' - ab')}{(a')^2 + (b')^2} \\ &= \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

- Montrons que $\overline{(z)^n} = (\bar{z})^n$, avec n entier relatif
Démontrons cette propriété par récurrence sur $\mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$, nous avons $\bar{z}^1 = \bar{z} = \overline{z^1}$, donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Supposons que la propriété est vraie pour un certain entier $n > 0$, c'est-à-dire $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$:

$$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \cdot z} \\ &= \overline{z^n} \cdot \bar{z} && \text{(car } \overline{ab} = \bar{a}\bar{b} \text{ pour tous complexes } a \text{ et } b) \\ &= \bar{z}^n \cdot \bar{z} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \bar{z}^{n+1}\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Ainsi, cette propriété est vraie pour tout $n > 0$.

Pour $n = 0$ et $z \neq 0$, nous avons $\overline{z^0} = \overline{1} = 1 = \bar{z}^0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Pour $n < 0$, posons $n = -m$ avec $m > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\overline{z^{-m}} &= \overline{\left(\frac{1}{z}\right)^m} \\ &= \left(\frac{\overline{1}}{\bar{z}}\right)^m \quad (\text{d'après ce qu'on vient de démontrer} \\ &\hspace{15em} \text{pour } n > 0) \\ &= \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^m \quad (\text{d'après la première propriété}) \\ &= \bar{z}^{-m}\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour tout n entier relatif.

