

Séquence XIII – Nombres complexes (partie 1)



Exercice XIII.1

Calculer $(2i)^2$, $(-5i)^3$, $(1+i)^2$ et $(1+2i)(2-i)$ grâce aux règles de calcul de $\mathbb{R}$ et le fait que $i^2 = -1$.



Exercice XIII.2

Résoudre les équations :

$$x^2 + 4 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - 4x + 13 = 0.$$



Exercice XIII.3

Calculer, selon les valeurs de l'entier relatif n , les valeurs de i^n , puis de $S = i^{2022} + i^{2023} + i^{2024} + i^{2025}$.



Exercice XIII.4

1. Calculer

- $z = 2(6 - 5i) - 3(4 + i)$
- $z' = (3 - 4i) \times (5 + 7i)$
- $z'' = (\sqrt{2} - 3i)^2$

2. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calculer j^2 , j^3 et $1 + j + j^2$.



Exercice XIII.5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, si $z = a + ib$ est l'afixe du point $M(a; b)$, déterminer (à l'aide d'une figure) les affixes de :

- M_1 , symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses,
- M_2 , symétrique de M par rapport à O ,
- M_3 , symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées,
- M_4 , symétrique de M par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Exercice XIII.6

Montrer que l'équation :

$$z^3 + (2i - 1)z^2 + (3 - 2i)z + 6i = 0$$

admet une solution imaginaire pure, à déterminer.



Exercice XIII.7

Déterminer les formes algébriques de $z_1 = \frac{1}{i}$,

$$z_2 = \frac{1}{2 + 3i}; z_3 = \frac{1}{2i - 5} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{3 + 2i}{2 - i}.$$



Exercice XIII.8

Soit $P(z) = 3z^3 + 10z^2 + 3z + 10$ où $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que le polynôme P admet deux racines imaginaires pures.
2. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$ et la factorisation de $P(z)$ en produit de facteurs du premier degré.
3. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P(z) = 0$ et la factorisation de $P(z)$ en un produit de deux polynômes à coefficients réels.



Exercice XIII.9

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ où $z \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$, un polynôme à coefficients $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ réels.

Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine du polynôme P , alors $\bar{\alpha}$ l'est aussi.



Exercice XIII.10

Calculer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de :

- | | |
|------------------|---------------------|
| a) $c = \pi - 3$ | d) $c = -24 - 70i$ |
| b) $c = 3 - \pi$ | |
| c) $c = -3 + 4i$ | e) $c = -85 - 132i$ |



Exercice XIII.11

Résoudre les équations :

- a) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$.
- b) $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$.
- c) $(4 + 2i)z^2 - 2(3 + 2i)z + 2 - i = 0$.
- d) $2z^2 + 3z + 7 = 0$.
- e) $z^3 - (2 + 3i)z^2 + (-1 + 4i)z + 2 - i = 0$.

Pour la dernière équation, on pourra chercher une solution imaginaire pure très simple...



Exercice XIII.12

Démontrer que, pour tout $(z; z') \in \mathbb{C}^2$:

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$ avec z' non nul
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ avec z' non nul
- $\overline{(z)^n} = (\bar{z})^n$, avec n entier relatif

