

# Nombres complexes (partie 1)

## 1. Introduction historique

Vers 1550, alors que certains mathématiciens refusaient encore de considérer des nombres négatifs, des mathématiciens italiens ont inventé, pour résoudre les équations du troisième degré, des nombres non-réels. L'activité suivante propose de suivre leur démarche et de comprendre comment les nombres complexes sont apparus dans l'histoire des mathématiques.

### A. La formule de Cardan

1. Considérons l'équation du troisième degré :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

En effectuant le changement de variable  $X = x + \frac{a}{3}$ , montrer que l'équation est équivalente à

$$X^3 + pX + q = 0 \quad (2)$$

où  $p$  et  $q$  sont des paramètres à déterminer en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

En substituant  $x = X - \frac{a}{3}$  dans l'équation (1), on obtient :

$$\left(X - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(X - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

Développons  $\left(X - \frac{a}{3}\right)^3$  :

$$\left(X - \frac{a}{3}\right)^3 = X^3 - aX^2 + \frac{a^2X}{3} - \frac{a^3}{27}$$

Développons  $a\left(X - \frac{a}{3}\right)^2$  :

$$a\left(X - \frac{a}{3}\right)^2 = aX^2 - \frac{2a^2X}{3} + \frac{a^3}{9}$$

Développons  $b\left(X - \frac{a}{3}\right)$  :

$$b\left(X - \frac{a}{3}\right) = bX - \frac{ab}{3}$$

L'équation devient :

$$X^3 - aX^2 + \frac{a^2X}{3} - \frac{a^3}{27} + aX^2 - \frac{2a^2X}{3} + \frac{a^3}{9} + bX - \frac{ab}{3} + c = 0$$

Les termes en  $X^2$  s'annulent.

Regroupons les termes :

$$X^3 + \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b\right)X + \left(-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

Simplifions :

$$X^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)X + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

Nous obtenons bien une équation de la forme  $X^3 + pX + q = 0$  avec :

$$p = b - \frac{a^2}{3} \quad \text{et} \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

2. Pour résoudre l'équation (2), on pose

$$X = u + v$$

et chercher une relation entre  $u$  et  $v$ .

Remplacer  $X$  par  $u + v$  dans l'équation (2) et développer l'expression, pour obtenir

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 \quad (3)$$

En remplaçant  $X = u + v$  dans l'équation (2), on obtient :

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

Développons  $(u + v)^3$  :

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$$

L'équation devient donc :

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$$

En factorisant par  $(u + v)$  :

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

3. Pour simplifier cette expression, on va imposer une condition entre  $u$  et  $v$ . Quelle condition peut-on imposer pour éliminer le terme en  $(u + v)$  ? Exprimer cette condition sous la forme d'une relation entre  $u$  et  $v$ .

Pour éliminer le terme en  $(u + v)$ , il faut que le facteur  $(3uv + p)$  soit nul. Donc on impose la condition :  $3uv + p = 0$  i.e.  $uv = -\frac{p}{3}$ .

4. En appliquant cette condition, montrer que résoudre l'équation (2) revient à résoudre le système

$$\begin{cases} uv = -\frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \quad (4)$$

En appliquant la condition  $3uv + p = 0$ , l'équation (3) devient :

$$u^3 + v^3 + 0 \times (u + v) + q = 0$$

i.e.  $u^3 + v^3 = -q$

On obtient donc

$$\begin{cases} uv = -\frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

5. Expliquer pourquoi le système (4) est équivalent au système

$$\begin{cases} u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \quad (5)$$

En élevant au cube la première équation  $uv = -\frac{p}{3}$ , on obtient :

$$(uv)^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$$

Soit :  $u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$

**Remarque :** l'élévation au cube conserve l'équivalence par bijectivité de la fonction  $x \mapsto x^3$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

D'où le nouveau système :

$$\begin{cases} u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

6. On cherche maintenant à déterminer  $u^3$  et  $v^3$ . En posant  $z_1 = u^3$  et  $z_2 = v^3$ , quelles sont les valeurs de la somme  $z_1 + z_2$  et du produit  $z_1 \times z_2$  ?

En posant  $z_1 = u^3$  et  $z_2 = v^3$ , d'après le système (5), on a :

$$\begin{cases} z_1 z_2 = -\frac{p^3}{27} \\ z_1 + z_2 = -q \end{cases}$$

Donc on connaît :

- La somme :  $z_1 + z_2 = -q$
- Le produit :  $z_1 \times z_2 = -\frac{p^3}{27}$

7. Quelle équation du second degré admet pour solutions  $z_1$  et  $z_2$  ? Montrer que le discriminant de cette équation est

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

Si  $z_1$  et  $z_2$  sont deux réels dont on connaît la somme  $S = -q$  et le produit  $P = -\frac{p^3}{27}$ , alors  $z_1$  et  $z_2$  sont les solutions de l'équation :

$$Z^2 - SZ + P = 0$$

c'est-à-dire :

$$Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0$$

Son discriminant est :

$$\Delta = q^2 - 4 \times \left(-\frac{p^3}{27}\right) = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

8. Si  $\Delta \geq 0$ , exprimer  $z_1$  et  $z_2$  à l'aide des données. En déduire les valeurs de  $u$  et  $v$ .

Si  $\Delta \geq 0$ , les solutions de l'équation du second degré sont :

$$z_1 = \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Or  $z_1 = u^3$  et  $z_2 = v^3$ , donc :

$$u = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} \quad \text{et} \quad v = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}}$$

9. Donner l'expression de  $X = u + v$  connue sous le nom de **formule de Cardan**.

En remplaçant les expressions de  $u$  et  $v$ , on obtient la formule de Cardan :

$$X = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

10. Que se passe-t-il lorsque  $\Delta < 0$  ? Étudions les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + px + q$ .

- (a) Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .

La fonction  $f$  est une fonction polynôme, donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + p$$

- (b) Distinguer deux cas selon le signe de  $p$ . Que peut-on dire des variations de  $f$  dans chaque cas ?

Deux cas se présentent :

- i. Si  $p \geq 0$  : Alors  $f'(x) = 3x^2 + p \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  (car  $3x^2 \geq 0$ ). La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- ii. Si  $p < 0$  : L'équation  $f'(x) = 0$  équivaut à  $3x^2 + p = 0$ , soit  $x^2 = -\frac{p}{3}$ . Comme  $p < 0$ , cette équation admet deux solutions réelles

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{et} \quad x_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

On a le tableau de variations suivant :

| $x$    | $-\infty$ | $x_1$             | $x_2$             | $+\infty$ |
|--------|-----------|-------------------|-------------------|-----------|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow \alpha$ | $\searrow -\beta$ | $+\infty$ |

- (c) Dans le cas où  $p < 0$ , combien de solutions réelles peut avoir l'équation  $f'(x) = 0$  ? De quoi cela dépend-il ?

On pourra poser  $u = \sqrt{-\frac{p}{3}}$  pour s'aider dans les calculs. On pourra noter  $x_1$  et  $x_2$  les extrema obtenus à la question précédente.

Dans le cas où  $p < 0$ , la fonction  $f$  présente un maximum local en  $x_1$  et un minimum local en  $x_2$ . Posons  $u = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ .

Notons  $\alpha = f(-u)$  et  $\beta = f(u)$ . Alors

$$\begin{aligned} \alpha &= (-u)^3 + p(-u) + q \\ &= -u^3 - pu + q \\ &= -u^3 + 3u^3 + q \\ &= 2u^3 + q \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \alpha = q + \frac{2p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

$$\begin{aligned} \beta &= u^3 + pu + q \\ &= u^3 - 3u^3 + q \\ &= -2u^3 + q \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \beta = q - \frac{2p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

Le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$  dépend des signes de  $\alpha$  et  $\beta$  :

- Si  $\alpha \times \beta > 0$ , l'équation admet une seule solution réelle.
- Si  $\alpha \times \beta = 0$ , l'équation admet deux solutions réelles dont une double.
- Si  $\alpha \times \beta < 0$ , l'équation admet trois solutions réelles distinctes.

(d) Montrer que  $f(x_1) \times f(x_2) = q^2 + \frac{4p^3}{27}$ .

Nous avons :

$$f(x_1) = q + \frac{2p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{et} \quad f(x_2) = q - \frac{2p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

Calculons  $f(x_1) \times f(x_2)$  :

$$f(x_1) \times f(x_2) = \left( q + \frac{2p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}} \right) \times \left( q - \frac{2p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}} \right)$$

Par la formule du produit remarquable  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \alpha \times \beta &= q^2 - \left( \frac{2p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}} \right)^2 \\ &= q^2 - \frac{4p^2}{9} \times \left( -\frac{p}{3} \right) \\ &= q^2 + \frac{4p^3}{27} \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression du discriminant  $\Delta$  calculé précédemment.

- (e) Quelle conclusion *a priori* paradoxale peut-on tirer de cette étude ?

Nous avons montré que :

- Si  $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} \geq 0$ , la formule de Cardan permet de trouver une solution réelle.
- Si  $\Delta < 0$ , ce qui correspond à  $f(x_1) \times f(x_2) < 0$ , l'équation admet trois solutions réelles.

Nous arrivons donc à un paradoxe : c'est précisément lorsque l'équation du troisième degré admet trois solutions réelles (cas où  $\Delta < 0$ ) que la formule de Cardan ne fonctionne pas telle quelle ! En effet, dans ce cas, la formule ferait intervenir la racine carrée d'un nombre négatif.

## B. L'innovation de Bombelli

Appliquons maintenant cette étude théorique au cas concret de l'équation  $X^3 - 15X - 4 = 0$ , en suivant l'ingénieuse idée de Bombelli. Notons  $(E)$  cette équation.

1. Identifier les valeurs de  $p$  et  $q$  pour  $(E)$ . Montrer que le discriminant  $\Delta$  vaut  $-(22)^2$ .

Pour l'équation  $X^3 - 15X - 4 = 0$ , on a :  $p = -15$  et  $q = -4$

Le discriminant vaut :

$$\begin{aligned}\Delta &= q^2 + \frac{4p^3}{27} \\ &= (-4)^2 + \frac{4 \times (-15)^3}{27} \\ &= 16 - \frac{4 \times 3375}{27} \\ &= 16 - 500 \\ &= -484\end{aligned}$$

On peut aussi écrire  $\Delta = -(22)^2$ .

2. Que devrait donner la formule de Cardan ? Pour contourner le problème, Bombelli a eu l'idée d'introduire un « objet » noté  $i$  tel que  $i^2 = -1$ . Comment s'écrit alors  $\sqrt{\Delta}$  ?

D'après la formule de Cardan, on devrait calculer :

$$X = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}}$$

Mais comme  $\Delta < 0$ , on ne peut pas calculer  $\sqrt{\Delta}$  dans  $\mathbb{R}$ . On va s'autoriser à utiliser certaines notations, que l'on n'utilisera pas en dehors de cette activité... on expliquera plus tard pourquoi. En introduisant l'objet non-réel  $i$  tel que  $i^2 = -1$ , on peut s'autoriser à écrire :

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta} &= \sqrt{-484} \\ &= \sqrt{484 \times (-1)} \\ &= \sqrt{484} \times \sqrt{-1} \\ &= 22 \times i\end{aligned}$$

3. En utilisant cette notation, que devient la formule de Cardan pour cet exemple ?

En utilisant  $\sqrt{\Delta} = 22i$ , la formule de Cardan devient :

$$\begin{aligned}X &= \sqrt[3]{\frac{4 - 22i}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4 + 22i}{2}} \\ &= \sqrt[3]{2 - 11i} + \sqrt[3]{2 + 11i}\end{aligned}$$

4. En utilisant que  $i^2 = -1$ , vérifier que  $(2 + i)^3 = 2 + 11i$ . Que deviendrait alors la « racine cubique de  $2 + 11i$  » ?

Calculons  $(2 + i)^3$  :

$$\begin{aligned}(2 + i)^3 &= (2 + i)^2 \times (2 + i) \\ &= (4 + 4i + i^2) \times (2 + i) \\ &= (4 + 4i - 1) \times (2 + i) \\ &= (3 + 4i) \times (2 + i) \\ &= 6 + 3i + 8i + 4i^2 \\ &= 6 + 11i - 4 \\ &= 2 + 11i\end{aligned}$$

On a donc  $(2 + i)^3 = 2 + 11i$ , ce qui signifie que  $\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + i$

5. De même, vérifier que  $(2 - i)^3 = 2 - 11i$ . Que devient la « racine cubique de  $2 - 11i$  » ?

De façon similaire, on peut calculer :

$$\begin{aligned}(2 - i)^3 &= (2 - i)^2 \times (2 - i) \\ &= (4 - 4i + i^2) \times (2 - i) = (4 - 4i - 1) \times (2 - i) \\ &= (3 - 4i) \times (2 - i) \\ &= 6 - 3i - 8i + 4i^2 \\ &= 6 - 11i - 4 \\ &= 2 - 11i\end{aligned}$$

On a donc  $(2 - i)^3 = 2 - 11i$ , ce qui signifie que  $\sqrt[3]{2 - 11i} = 2 - i$

6. Calculer la valeur de  $X$  grâce à la formule de Cardan. Vérifier que cette valeur est bien une solution de l'équation initiale.

D'après les résultats précédents :

$$\begin{aligned}X &= \sqrt[3]{2 - 11i} + \sqrt[3]{2 + 11i} \\ &= (2 - i) + (2 + i) = 4\end{aligned}$$

Vérifions que  $X = 4$  est solution de l'équation  $X^3 - 15X - 4 = 0$  :

$$\begin{aligned}4^3 - 15 \times 4 - 4 &= 64 - 60 - 4 \\ &= 0\end{aligned}$$

La solution  $X = 4$  est bien valide.

7. Quelle conclusion peut-on tirer de cet exemple ?

Cet exemple montre que même lorsque le discriminant est strictement négatif, la formule de Cardan peut donner une solution réelle en passant par des nombres « imaginaires » ou « impossibles » comme les appelaient les mathématiciens de l'époque. Plus précisément, on constate que des quantités réelles peuvent être représentées à l'aide de ces nouveaux nombres qu'on appelle aujourd'hui « nombres complexes ». Même si ces nombres semblaient d'abord étranges ou « imaginaires », ils permettent de résoudre des problèmes concrets dans le domaine des nombres réels. C'est ainsi que les nombres complexes ont fait leur apparition dans l'histoire des mathématiques, comme un outil pour résoudre les équations du troisième degré, avant d'être plus largement acceptés et étudiés pour eux-mêmes.

L'introduction a permis de découvrir l'origine historique des nombres complexes et leur première utilisation pour résoudre des équations du troisième degré. Dans la suite du cours, nous étudierons de façon plus formelle ces nouveaux nombres et leurs propriétés.

### ⚠ Attention

Les notations « racines carrées, cubiques... » ne doivent absolument pas être utilisées sans précaution pour les nombres complexes, sous peine d'erreurs grossières. Mais à l'époque et même longtemps après, ces risques d'erreurs ont été négligés.

## 2. Introduction théorique

### A. Le nombre $i$

#### ■ DÉFINITION :

On définit un nombre noté  $i$  dont le carré vaut  $-1$ . Ce nombre n'appartient pas à l'ensemble des réels, puisque le carré d'un réel est toujours positif.

**Remarque :** On peut ainsi créer de nouveaux nombres, comme  $2i$ ,  $-5i$ ,  $2 + 3i$ , en utilisant les règles de calcul usuelles dans l'ensemble  $\mathbb{R}$ .

#### ■ DÉFINITION :

On crée un sur-ensemble de  $\mathbb{R}$  contenant les réels et le nombre « non-réel »  $i$ , solution de  $x^2 + 1 = 0$ . Pour pouvoir résoudre d'autres équations, créer d'autres nombres et effectuer des opérations dans ce nouvel ensemble, noté  $\mathbb{C}$ , on décide de le munir de la même « structure » que celle de  $\mathbb{R}$ .

**Remarque :** Pour information, on appelle cette structure un **corps commutatif**.

### B. Extensions de la création de $i$

**Exemple :** Le nombre  $-i$

Comme  $i^2 = -1$ , on peut écrire  $x^2 - i^2 = 0$  d'où  $(x + i)(x - i) = 0$  donc  $x = i$  ou  $x = -i$ . On crée ainsi le nombre  $-i$ .

On crée ainsi des nombres de la forme  $a + bi$ , avec  $a$  et  $b$  réels, et  $i$  un nombre non-réel vérifiant  $i^2 = -1$ .

#### ■ PROPRIÉTÉ :

Soient  $a$ ,  $b$ ,  $a'$  et  $b'$  quatre réels. En utilisant la commutativité et l'associativité de  $+$  et de  $\times$  et la distributivité de  $\times$  par rapport à  $+$ , on a :

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$$

$$(a + bi) \times (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

## 3. Définition et construction de $\mathbb{C}$

#### ■ DÉFINITION :

On appelle **nombre complexe** un nombre pouvant s'écrire  $a + bi$ , avec  $a$  et  $b$  réels, et  $i$  un nombre non-réel, vérifiant  $i^2 = -1$ . On note  $\mathbb{C}$  cet ensemble.

**Remarque :**  $\mathbb{C}$  contient les nombres réels, obtenus lorsque  $b = 0$ . Ainsi  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

#### ■ PROPRIÉTÉ :

Si  $a$  et  $b$  sont des réels, alors :

$$a + ib = 0 \text{ si et seulement si } a = b = 0$$

### ⚠ Attention

Cette propriété n'est valable que si  $a$  et  $b$  sont réels. Contre-exemple :  $1 + i \times i = 0$

#### ■ COROLLAIRE :

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes. On pose  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  avec  $a$ ,  $b$ ,  $a'$  et  $b'$  quatre nombres réels. Alors :

$$(z = z') \text{ si et seulement si } (a = a' \text{ et } b = b')$$

#### ■ DÉFINITION :

Tout nombre complexe  $z$  s'écrit de façon unique sous la forme  $z = a + ib$  avec  $a$  et  $b$  réels.  $a$  s'appelle la **partie réelle** de  $z$  et  $b$  la **partie imaginaire** de  $z$ .

**Notation :**  $a = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re} z$  et  $b = \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im} z$

### ⚠ Attention

Malgré son nom, la partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel.

#### ■ DÉFINITION :

L'écriture  $z = a + ib$  avec  $a$  et  $b$  réels, s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe  $z$ . On dit aussi l'**écriture algébrique**.

## 4. Interprétation géométrique d'un complexe

### ■ DÉFINITION :

La forme algébrique d'un nombre complexe est unique, comme le sont les coordonnées d'un point  $M$  ou d'un vecteur  $\overrightarrow{OM}$  dans un repère  $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}, \vec{v})$  :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

Ainsi, le complexe  $x + iy$  est appelé l'**affiche** (nom féminin) du point  $M$  et du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .

Notation :  $\text{aff}(M) = \text{aff}(\overrightarrow{OM}) = x + iy$ .

**Remarque :** Lorsque les points du plan géométrique, muni d'un repère orthonormé  $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}, \vec{v})$ , sont repérés non plus par leurs coordonnées, mais par leur affiche, on parle de **plan complexe**, ou encore de **plan d'Argand-Cauchy**.

### ■ PROPRIÉTÉ :

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Soit  $M$  et  $M'$  deux points du plan d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ . Alors : la somme  $z + z'$  est l'affixe du point  $S$  tel que

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$$

la différence  $z' - z$  est l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{MM'}$

## 5. Sous-ensemble de $\mathbb{C}$

On a déjà cité le cas de l'ensemble des réels, qui sont les nombres complexes de partie imaginaire nulle.

### ■ VOCABULAIRE :

Les nombres complexes de partie réelle nulle, donc de la forme  $ib$  avec  $b$  réel, s'appellent les (nombres) **imaginaires purs**. Leur ensemble est noté  $i\mathbb{R}$ , c'est-à-dire l'ensemble des nombres s'écrivant comme le produit de  $i$  par un réel.

Exemple :

0 est le seul nombre à la fois réel et imaginaire pur.

### ■ PROPRIÉTÉ :

Graphiquement, les réels  $a$  sont les affixes des points de coordonnées  $(a; 0)$ , donc ceux de l'axe des abscisses, appelé aussi **axe des réels**. Les imaginaires purs  $ib$  sont les affixes des points de coordonnées  $(0; b)$ , donc ceux de l'axe des ordonnées, appelé aussi **axe des imaginaires purs**.

Exemple :

Le nombre 0 est l'affixe de l'origine du repère, qui est bien à l'intersection de ces deux axes.

## 6. Opérations sur les nombres complexes

On a déjà vu en au début de la partie 2 comment effectuer la somme et le produit de deux nombres complexes. Complétons :

### ■ PROPRIÉTÉ :

L'**opposé** d'un complexe  $z$  est le nombre  $z'$  tel que

$$z + z' = 0$$

On a donc  $z' = -z = -a - ib$

La **différence** est définie par

$$z - z' = z + (-z')$$

L'**inverse** d'un complexe  $z$  non nul est le nombre  $z''$  tel que

$$z \times z'' = 1$$

On a donc

$$z'' = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}$$

Le **quotient** de deux complexes est défini par :

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} \text{ (avec } z' \neq 0)$$

**Remarque :** Pour pouvoir écrire l'inverse d'un complexe  $z$  non nul sous forme algébrique, multiplions les numérateur et dénominateur par  $a - ib$ , dans l'esprit de la multiplication par la « quantité conjuguée » de certains calculs algébriques réels.

En effet,  $(a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$  est réel. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + ib} &= \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \\ &= \left( \frac{a}{a^2 + b^2} \right) + i \left( \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \end{aligned}$$

## 7. Conjugué d'un nombre complexe

### ■ DÉFINITION :

Pour tout nombre complexe  $z$ , dont la forme algébrique est  $a + ib$  (donc avec  $a$  et  $b$  réels), on appelle (nombre) **complexe conjugué** de  $z$  le nombre noté  $\bar{z}$  (lu «  $z$  barre ») et vérifiant  $\bar{\bar{z}} = z$ .

On a donc  $\text{Re}(\bar{z}) = \text{Re}(z)$  et  $\text{Im}(\bar{z}) = -\text{Im}(z)$

**Remarque :** Quel que soit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\bar{\bar{z}} = z$ .

### ■ PROPRIÉTÉ :

Graphiquement, si  $z$  est l'affixe d'un point  $M$ , son conjugué  $\bar{z}$  est l'affixe du symétrique  $M'$  de  $M$  par rapport à l'axe des abscisses.



## ■ PROPRIÉTÉ :

Pour tout nombre complexe  $z$  :

- $z$  est réel si et seulement si  $\bar{z} = z$ .
- $z$  est imaginaire pur si et seulement si  $\bar{z} = -z$

## ■ PROPRIÉTÉ : Formules d'Euler (première écriture)

Pour tout nombre complexe  $z$  :

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

## ■ PROPRIÉTÉ :

Pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$  (donc si  $k$  réel,  $\overline{k \times z} = k \times \bar{z}$ )
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$  avec  $z'$  non nul
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$  avec  $z'$  non nul
- $\overline{(z)^n} = (\bar{z})^n$ , avec  $n$  entier relatif

## 8. Polynômes et nombres complexes

### ■ PROPRIÉTÉ : Racines et factorisation

Si  $z_0 \in \mathbb{C}$  est une racine d'un polynôme  $P(z)$ , alors  $P(z)$  est factorisable par  $(z - z_0)$ .

Par conséquent :

Un polynôme  $P(z)$  de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines complexes distinctes.

Étudions le cas des polynômes de degré 2 :

### ■ DÉFINITION : Racine carrée d'un nombre complexe

Soit  $c = a + ib$ ,  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  un nombre complexe. On appelle **racine carrée** de  $c$  tout nombre complexe  $r$  tel que  $r^2 = c$ .

**Remarque :**  $r$  étant racine complexe du polynôme  $X^2 - c = 0$  et ce polynôme ayant au plus deux racines distinctes, on en déduit que le nombre complexe  $c$  admet au plus deux racines carrées distinctes.

**Exemple :**

- $-2$  et  $2$  sont selon cette définition les racines carrées du nombre 4.

En fait, lorsque  $c$  est un réel positif, on appelle racine carrée de  $c$  le nombre  $r \geq 0$  tel que  $r^2 = c$ .

- Vérifier que  $2i$  et  $-2i$  sont les deux racines carrées de  $-4$ .

$$(2i)^2 = 2i \times 2i = 2 \times 2 \times i^2 = 4 \times (-1) = -4$$

$$\begin{aligned} (-2i)^2 &= -2i \times (-2i) \\ &= -2 \times (-2) \times i^2 \\ &= 4 \times (-1) \\ &= -4 \end{aligned}$$

- De quel complexe les nombres  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  et  $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$  sont-ils les deux racines carrées ?

Calculons donc  $z^2$  :

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 \\ &= \frac{2}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{2}{4}i^2 \\ &= \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} \\ &= i \end{aligned}$$

Donc  $z^2 = i$ .

Vérifions aussi avec l'autre valeur

$$z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i :$$

$$\begin{aligned} (z')^2 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 \\ &= \frac{2}{4} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} \\ &= i \end{aligned}$$

On a bien  $(z')^2 = i$ .

Donc les nombres  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  et  $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$  sont les deux racines carrées du nombre complexe  $i$ .

### ■ PROPRIÉTÉ : Existence des racines carrées

Tout nombre complexe  $c \neq 0$  admet deux racines carrées complexes opposées.

*Démonstration.*

- Premier cas :  $c \in \mathbb{R}$  : Il est clair que  $r = \pm\sqrt{c}$  si  $c \geq 0$  et  $r = \pm i\sqrt{-c}$  si  $c < 0$  sont les racines carrées de  $C$ .
- Deuxième cas :  $c = a + ib$  où  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  et  $b \neq 0$  : Posons  $r = x + iy$  où  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} c = r^2 &\iff a + ib = (x + iy)^2 \\ &\iff a + ib = x^2 - y^2 + 2ixy \\ &\iff (S) : \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \end{aligned}$$

où la dernière équivalence est obtenue par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.

Ce système peut alors résolu par substitution : comme  $b \neq 0$ , on sait que  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$  puis on termine en remplaçant  $y$  par  $\frac{b}{2x}$  dans la première équation.

Toutefois, en pratique, il est judicieux d'utiliser le fait suivant : on sait que  $c \times \bar{c} = a^2 + b^2$ . Or

$$c\bar{c} = r^2 \times \bar{r}^2 = (r\bar{r})^2$$

et

$$r\bar{r} = x^2 + y^2$$

Par conséquent, on a l'égalité :

$$a^2 + b^2 = (x^2 + y^2)^2$$

et finalement :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

car  $x^2 + y^2$  est une somme de carrés de réels, donc est positive.

Le système (S) peut donc s'écrire :

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ y^2 = \frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ 2xy = b \end{cases}$$

L'utilisation de l'égalité  $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$  permet de raccourcir la résolution.

On observe que  $b$  étant non nul, les nombres  $a + \sqrt{a^2 + b^2}$  et  $-a + \sqrt{a^2 + b^2}$  sont strictement positifs, ce qui assure l'existence de  $x$  et  $y$ .

De plus, si  $b > 0$ , la troisième équation entraîne que  $x$  et  $y$  sont de même signe ; sinon ils sont de signes contraires. Ainsi :

$$(S) \iff \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ y = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ b \geq 0 \end{cases}$$

ou

$$(S) \iff \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ y = \mp \sqrt{\frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ b < 0 \end{cases}$$

Ainsi, tout nombre complexe  $c$  non-réel  $\mathbb{R}$  admet exactement deux racines carrées distinctes opposées.  $\square$

**Remarque :** Il est inutile d'apprendre cette démonstration formellement mais, en pratique, il faut mener les calculs de cette manière.

**Exemple :**

1. Les racines carrées de  $c = 2$  sont  $\sqrt{2}$  et  $-\sqrt{2}$ .
2. Les racines carrées de  $c = -\pi$  sont  $i\sqrt{\pi}$  et  $-i\sqrt{\pi}$ .
3. Cherchons les racines carrées de  $C = -5 + 12i$  sous la forme  $r = x + iy$  avec  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  selon la méthode de la preuve :

$$\begin{aligned} -5 + 12i &= (x + iy)^2 \\ \iff -5 + 12i &= x^2 - y^2 + 2ixy \\ \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} \\ xy = 6 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ xy > 0 \end{cases} \end{aligned}$$



Avec la remarque faite dans la preuve :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Ainsi, les deux racines carrées de  $-5 + 12i$  sont  $2 + 3i$  et  $-2 - 3i$ .

■ **THÉORÈME** : Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes

On considère l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  :

$$az^2 + bz + c = 0$$

où  $(a; b; c) \in \mathbb{C}^3$  et  $a \neq 0$ .

On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Si  $\delta$  est une racine carrée complexe de  $\Delta$ , alors les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Longleftrightarrow a \left[ z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right] = 0 \text{ car } a \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = 0 \\ &\Longleftrightarrow a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

jusque là, le calcul est le même que dans  $\mathbb{R}$ .

On retrouve la forme canonique

$$a \left[ \left( Z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

du trinôme  $aZ^2 + bZ + c$ .

On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ , qui est complexe. On a démontré que  $\Delta$  admet une racine carrée (une seule qui est 0 si  $\Delta = 0$  et deux distinctes sinon).

Notons  $\delta$  une racine carrée complexe de  $\Delta$  : l'autre est donc  $-\delta$ , ces deux racines étant confondues dans le cas où  $\Delta = 0$ . Alors :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= 0 \\ \Longleftrightarrow a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2} \right] &= 0 \\ \Longleftrightarrow a \left( z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right) \left( z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) &= 0 \\ \Longleftrightarrow \left( z - \frac{-b + \delta}{2a} \right) \left( z - \frac{-b - \delta}{2a} \right) &= 0 \\ \Longleftrightarrow z = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b - \delta}{2a} \end{aligned}$$

Exemple :

Réolvons dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

Calculons le discriminant  $\Delta$  de cette équation :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 \\ &= 16 - 52 \\ &= -36 \\ &= (6i)^2 \end{aligned}$$

Le discriminant est un réel négatif, donc l'équation n'admet pas de solutions réelles mais deux solutions complexes non réels conjuguées.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{4 + 6i}{2} & z_2 &= \frac{4 - 6i}{2} \\ z_1 &= 2 + 3i & z_2 &= 2 - 3i \end{aligned}$$

D'où  $\mathcal{S} = \{2 - 3i; 2 + 3i\}$ .

Exemple :

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$(1 + i)z^2 + (2 + i)z - 2i = 0$$

Calculons le discriminant  $\Delta$  de cette équation :

$$\begin{aligned} \Delta &= (2 + i)^2 - 4 \times (1 + i) \times (-2i) \\ &= 4 + 4i - 1 + 8i(1 + i) \\ &= 3 + 4i + 8i - 8 \\ &= -5 + 12i \end{aligned}$$

On a montré qu'une racine carrée de  $-5 + 12i$  est  $2 + 3i$ . Ainsi

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-2 - i + 2 + 3i}{2(1 + i)} & z_2 &= \frac{-2 - i - 2 - 3i}{2(1 + i)} \\ z_1 &= \frac{2i}{2 + 2i} & z_2 &= \frac{-4 - 4i}{2 + 2i} \\ z_1 &= \frac{i}{1 + i} & z_2 &= -2 \\ z_1 &= \frac{i(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} & z_2 &= -2 \\ z_1 &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & z_2 &= -2 \end{aligned}$$

D'où  $\mathcal{S} = \left\{ -2; \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right\}$ .