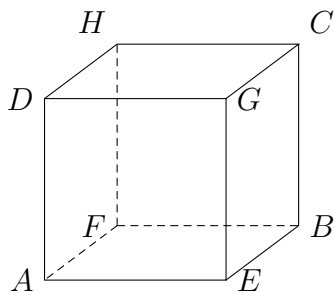


Séquence XII – Géométrie dans l'espace

Vecteurs coplanaires

Exercice 1

On considère le cube ci-dessous :



Compléter les égalités vectorielles suivantes avec des sommets du cube $AEBFDGCH$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{A\dots}$$

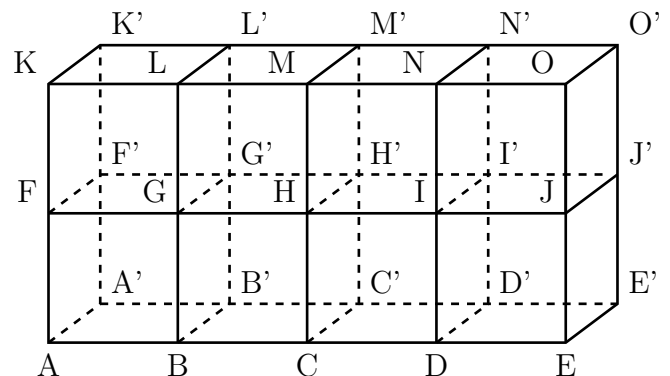
$$\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{F\dots}$$

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} = \dots \overrightarrow{B}$$

$$\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FC} = \dots \overrightarrow{G}$$

Exercice 2

On considère les huit cubes accolés de la figure ci-dessous :



Compléter chacune des égalités suivantes en utilisant un point (nommé) de la figure.

$$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A\dots\dots}$$

$$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{C\dots\dots}$$

$$3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{A\dots\dots}$$

$$\overrightarrow{FH'} - 2\overrightarrow{AF} = \dots\dots \overrightarrow{D'}$$

$$\overrightarrow{BI'} + \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{JO} = \overrightarrow{A\dots}$$

$$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{GO} - \overrightarrow{A'A} = \dots \overrightarrow{O'}$$

Solution de l'exercice 1

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AH}$$

$$\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{FB}$$

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EB}$$

$$\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FG}$$

Solution de l'exercice 2

$$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$$

$$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CJ}$$

$$3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO}$$

$$\overrightarrow{FH'} - 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{LD'}$$

$$\overrightarrow{BI'} + \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{JO} = \overrightarrow{AL'}$$

$$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{GO} - \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{FO'}$$

Exercice 3

Soient $\vec{v}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non-coplanaires.

1. Soient $\vec{u} = \vec{v} - \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{v} + \vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{j} + \vec{k}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

2. Même question avec : $\vec{u} = \vec{v} - \vec{j} + \vec{k}$
 $\vec{v} = 2\vec{v} + \vec{k}$ et $\vec{w} = 3\vec{v} - \vec{j}$.

Solution de l'exercice 3

Pour déterminer si trois vecteurs sont coplanaires, on peut vérifier s'il existe une combinaison linéaire, c'est-à-dire s'il existe $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$.

1. Cherchons à exprimer $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Supposons qu'il existe $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$. Alors

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \alpha(2\vec{v} + \vec{k}) + \beta(2\vec{j} + \vec{k}) \\ &= 2\alpha\vec{v} + \alpha\vec{k} + 2\beta\vec{j} + \beta\vec{k} \\ &= 2\alpha\vec{v} + 2\beta\vec{j} + (\alpha + \beta)\vec{k}\end{aligned}$$

On obtient ainsi le système :

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ 2\beta = -1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

Donc $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$. Ainsi les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

2. Cherchons à exprimer $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$. Alors

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \alpha(2\vec{v} + \vec{k}) + \beta(3\vec{v} - \vec{j}) \\ &= 2\alpha\vec{v} + \alpha\vec{k} + 3\beta\vec{v} - \beta\vec{j} \\ &= (2\alpha + 3\beta)\vec{v} - \beta\vec{j} + \alpha\vec{k}\end{aligned}$$

On obtient ainsi le système :

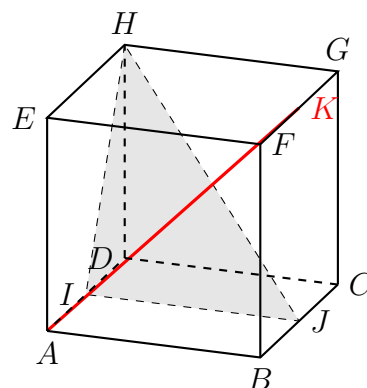
$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 1 \\ -\beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 1 \\ \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Ce système n'admet de solution (la première équation n'est pas vérifiée pour $\alpha = 1$ et $\beta = 1$). Donc il n'existe pas de combinaison linéaire telle que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$. Ainsi les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 4

$ABCDEFGH$ est un cube, I est le milieu de $[AD]$, J est le milieu de $[BC]$ et K celui de $[FG]$.

Démontrer que la droite (AK) est parallèle au plan (IHJ) .



Solution de l'exercice 4 Pour démontrer que la droite (AK) est parallèle au plan (IHJ) , nous allons montrer qu'un vecteur directeur de la droite (AK) est un vecteur du plan (IHJ) . Le plan (IJH) est le plan qui passe par le point I et qui admet comme couple de vecteurs directeurs $(\vec{IJ}; \vec{IH})$ (où $\vec{IJ}$ et $\vec{IH}$ sont non colinéaires).

Exprimons $\vec{AK}$ comme combinaison linéaire de $\vec{IJ}$ et $\vec{IH}$ pour montrer que ces trois vecteurs sont coplanaires.

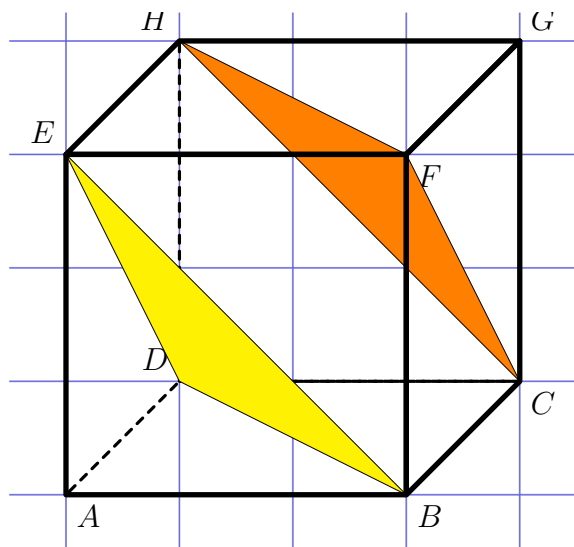
$$\begin{aligned}\vec{AK} &= \vec{AB} + \vec{BK} \\ &= \vec{IJ} + \vec{JG} \\ &= \vec{IJ} + \vec{IH}\end{aligned}$$

Ainsi $\vec{AK}$, $\vec{IJ}$ et $\vec{IH}$ sont coplanaires, et donc la droite (AK) est parallèle au plan $\mathcal{P}(I; \vec{IJ}; \vec{IH}) = (IHJ)$.



Exercice 5

$ABCDEFGH$ est un cube. Montrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.



Solution de l'exercice 5 Les points B , D et E (respectivement C , F et H) ne sont pas alignés, donc le couple de vecteurs $(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{BD})$ (respectivement $(\overrightarrow{FH}; \overrightarrow{CF})$) est un couple de vecteurs directeurs du plan (BDE) (respectivement (CFH)). On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{CF} \\ &= 1 \times \overrightarrow{CF} + 0 \times \overrightarrow{FH}\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont coplanaires. De même,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{FH} \\ &= 0 \times \overrightarrow{CF} + 1 \times \overrightarrow{FH}\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont coplanaires. Donc les vecteurs directeurs de (BDE) et ceux de (CFH) sont coplanaires.

On en conclut que ces deux plans sont parallèles.

Séquence XII – Géométrie dans l'espace

Géométrie repérée



Exercice 6

Pour chacune des figures suivantes, lire les coordonnées du point A dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et les coordonnées du vecteur $\vec{u}$. Examiner ensuite si les points B, C et D définis par leurs coordonnées sont des points de la droite $d(A; \vec{u})$.

Figure 1 : $B(3; 1; 6), C(-1; 0; 3)$ et $D(7; -1; 12)$

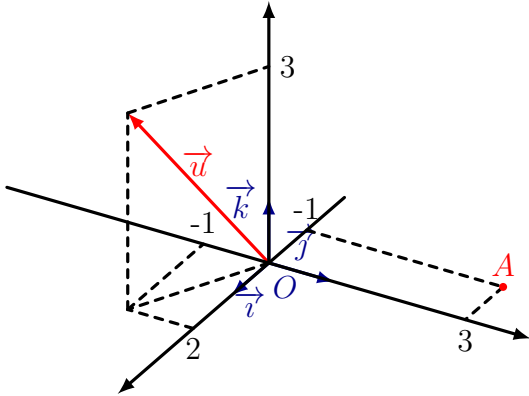
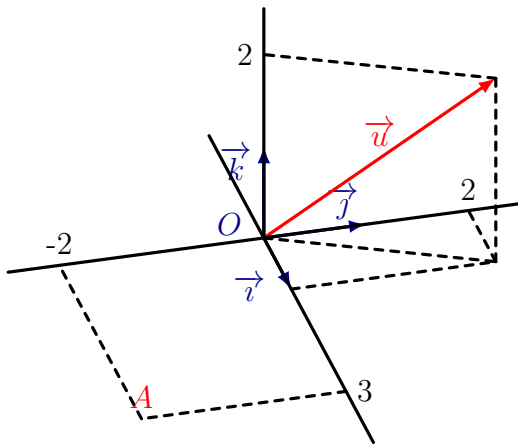


Figure 2 : $B(5; 2; 4), C(6; 4; 6)$ et $D(0; -8; -8)$.



De plus,

$$B \in d(A; \vec{u}) \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ \iff \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB} = k \vec{u}$$

Or, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$, donc $B \in d(A; \vec{u})$.

— Pour le point $C(-1; 0; 3)$: $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Supposons par l'absurde qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k \vec{u}$. Alors on obtient

$$\begin{cases} 0 = 2k \\ -3 = -k \\ 3 = 3k \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} 0 = k \\ 3 = k \\ 1 = k \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution, et donc $B \notin d(A; \vec{u})$.

— Pour le point $D(7; -1; 12)$: $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$

De plus,

$$D \in d(A; \vec{u}) \iff \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AD} = k \vec{u}$$

Or, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{u}$, donc $D \in d(A; \vec{u})$.

Figure 2 : D'après la figure, nous pouvons lire :

— Le point A a pour coordonnées $A(3; -2; 0)$

— Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vérifions si les points $B(5; 2; 4)$, $C(6; 4; 6)$ et $D(0; -8; -9)$ appartiennent à la droite $d(A; \vec{u})$.

— Pour le point $B(5; 2; 4)$: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

De plus,

$$B \in d(A; \vec{u}) \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ \iff \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB} = k \vec{u}$$

$$\iff \begin{cases} 2 = 1 \times k \\ 4 = 2 \times k \\ 4 = 2 \times k \end{cases}$$

$$\iff k = 2$$

Donc $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$, donc $B \in d(A; \vec{u})$.

Solution de l'exercice 6

Figure 1 : D'après la figure, nous pouvons lire :

— Le point A a pour coordonnées $A(-1; 3; 0)$

— Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vérifions si les points $B(3; 1; 6)$, $C(-1; 0; 3)$ et $D(7; -1; 12)$ appartiennent à la droite $d(A; \vec{u})$.

— Pour le point $B(3; 1; 6)$: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

— Pour le point $B(6; 4; 6)$: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

De plus,

$$B \in d(A; \vec{u}) \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ \iff \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB} = k\vec{u}$$

Or, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{u}$, donc $C \in d(A; \vec{u})$.

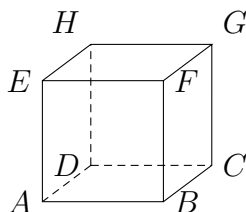
— Pour le point $D(0; -8; -8)$: $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$

$$D \in d(A; \vec{u}) \iff \overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ \iff \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AD} = k\vec{u} \\ \iff \begin{cases} -3 = 1 \times k \\ -6 = 2 \times k \\ -8 = 2 \times k \end{cases} \\ \iff \begin{cases} -3 = k \\ -6 = k \\ -4 = k \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution, donc $D \notin d(A; \vec{u})$.

Exercice 7

Soit $ABCDEFGH$ le cube ci-contre :



1. Expliquer pourquoi $(G; \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH})$ est un repère orthonormé de l'espace.
2. Dans ce repère, donner les coordonnées des sommets de ce cube, celles du vecteur $\overrightarrow{GA}$ et celles du point M tel que : $\overrightarrow{GM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GA}$.

Solution de l'exercice 7 On considère le cube $ABCDEFGH$ comme indiqué sur la figure. On notera que dans un cube, toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Montrons que $(G; \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH})$ est un repère orthonormé de l'espace.

Pour qu'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit orthonormé, il faut que :

- Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ soient orthogonaux deux à deux
- Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ soient tous de norme 1.

Dans notre cas :

— $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont orthogonaux deux à deux car ils correspondent aux directions de trois arêtes concourantes du cube en G . Dans un cube, les arêtes issues d'un même sommet sont perpendiculaires entre elles.

— Comme toutes les arêtes du cube ont la même longueur, que nous pouvons poser égale à 1, on a : $\|\overrightarrow{GC}\| = \|\overrightarrow{GF}\| = \|\overrightarrow{GH}\| = 1$

Les deux conditions sont satisfaites, donc $(G; \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH})$ est bien un repère orthonormé de l'espace.

2. Dans ce repère, déterminons les coordonnées des sommets du cube, du vecteur $\overrightarrow{GA}$ et du point M .

Comme G est l'origine du repère, ses coordonnées sont $G(0; 0; 0)$.

Ainsi, on obtient :

- C a pour coordonnées $(1, 0, 0)$
- F a pour coordonnées $(0, 1, 0)$
- H a pour coordonnées $(0, 0, 1)$

Pour les autres sommets, nous allons utiliser les relations vectorielles dans le cube :

— $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GF}$ car $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont égaux (côtés opposés d'un parallélogramme).

Donc $\overrightarrow{GB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B(1; 1; 0)$.

— $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH}$ car $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont égaux. Donc $\overrightarrow{GD} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D(1; 0; 1)$.

— $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH}$ car $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont égaux. Donc $\overrightarrow{GE} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E(0; 1; 1)$.

— Pour le sommet A , on a $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GF}$ car $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont égaux.

Donc $\overrightarrow{GA} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A(1; 1; 1)$.

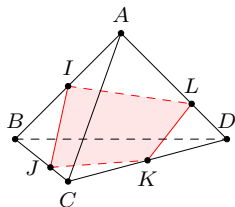
Si le point $M(x; y; z)$ vérifie $\overrightarrow{GM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GA}$, alors

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \times 1 \\ y = \frac{2}{3} \times 1 \\ z = \frac{2}{3} \times 1 \end{cases}$$

Les coordonnées du point M sont donc $M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Exercice 8

$ABCD$ est un tétraèdre.
Les points I et K sont les milieux des segments $[AB]$ et $[CD]$, J et L sont les points tels que $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.



- Déterminer les coordonnées de I , J , K et L dans le repère $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$.
- Montrer que ces quatre points sont coplanaires.

Solution de l'exercice 8

a) $I\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ et $J\left(\frac{2}{3}; 0; 0\right)$.

De plus,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BK} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} \\ &= \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + 0\overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

Donc $K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

De même,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BL} &= \overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}) \\ &= \overrightarrow{BD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + 0\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Donc $L\left(0; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

- b) Les vecteurs $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont non-colinéaires, on peut donc définir le plan $\mathcal{P} = \mathcal{P}(I; \overrightarrow{IL}, \overrightarrow{IJ})$. Pour montrer que les quatre points sont coplanaires, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires.

$$\bullet \text{ On a } \overrightarrow{IL} \begin{pmatrix} 0-0 \\ \frac{2}{3}-0 \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ i.e. } \overrightarrow{IL} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{ On a } \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}-0 \\ 0-0 \\ 0-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ i.e. } \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{ On a } \overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-0 \\ \frac{1}{2}-0 \\ 0-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ i.e. } \overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On cherche à exprimer $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\overrightarrow{IK} = \alpha\overrightarrow{IL} + \beta\overrightarrow{IJ}$$

Grâce aux coordonnées, on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\beta \\ \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\alpha \\ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{2}\beta \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} \beta = \frac{3}{4} \\ \alpha = \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{2}\beta \end{cases}$$

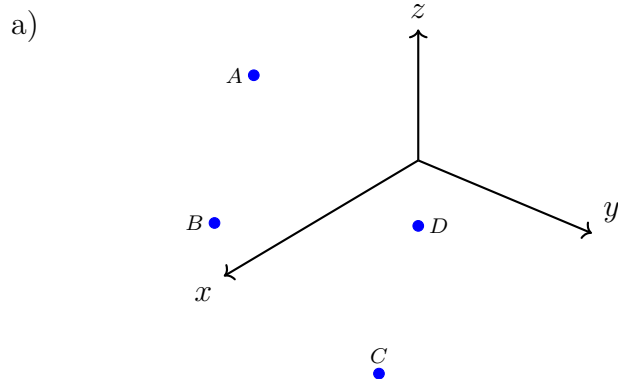
On obtient donc $\overrightarrow{IK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IL} + \frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$, les points I , J , K et L sont donc coplanaires.

Exercice 9

Soit un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Soit $A(1; -2; 1)$, $B(3; -1; 0)$, $C(2; 1; -2)$ et $D(0; 0; -1)$.
Placer ces quatre points dans le repère. Forment-ils les sommets d'un parallélogramme?
- Soit $D(1; 0; 2)$, $E\left(2; 1; \frac{3}{2}\right)$ et $F(3; 2; 1)$.
Ces points sont-ils alignés?
- Soit $D(1; 0; 2)$, $E\left(2; 1; \frac{3}{2}\right)$, $F(-1; 3; 2)$ et $G(-1; -7; 4)$.
Ces points sont-ils coplanaires?
- Soit $\vec{u}\left(\frac{0}{7}; \frac{1}{4}\right)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{0}\right)$, $\vec{w}\left(\frac{13}{4}; \frac{3}{-2}\right)$, $A(-5; 2; 0)$ et $B(2; -1; 3)$.
La droite $d(A; \vec{u})$ est-elle parallèle au plan $\mathcal{P}(B; \vec{v}, \vec{w})$?
- Soit $\vec{u}\left(\frac{-1}{0}; \frac{4}{0}\right)$, $\vec{v}\left(\frac{4}{0}; \frac{-1}{0}\right)$, $\vec{u}'\left(\frac{13}{-3}; \frac{5}{-2}\right)$, $\vec{v}'\left(\frac{5}{-1}; \frac{-1}{-2}\right)$, $A(-5; 2; 0)$ et $B(2; -1; 3)$.
Les plans $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{P}(B; \vec{u}', \vec{v}')$ sont-ils parallèles?

Solution de l'exercice 9 Dans cet exercice, on se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-1 \\ -1+2 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De plus, $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-1 \\ -1+2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$, i.e. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

- b) Nous devons déterminer si les points $D(1; 0; 2)$, $E(2; 1; \frac{3}{2})$ et $F(3; 2; 1)$ sont alignés.

Ces trois points sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.

On a $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ \frac{3}{2}-2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

De plus, $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-0 \\ 1-2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{DE}$, donc les vecteurs sont colinéaires et les trois points D , E et F sont alignés.

- c) Nous devons déterminer si les points $D(1; 0; 2)$, $E(2; 1; \frac{3}{2})$, $F(-1; 3; 2)$ et $G(-1; -7; 4)$ sont coplanaires.

Pour vérifier si ces quatre points sont coplanaires, on peut déterminer si le vecteur $\overrightarrow{DE}$ appartient au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DG}$. Autrement dit, on cherche s'il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{DE} = \alpha \cdot \overrightarrow{DF} + \beta \cdot \overrightarrow{DG}$.

On a $\overrightarrow{DG} \begin{pmatrix} -1-1 \\ -7-0 \\ 4-2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DG} \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De plus $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} -1-1 \\ 3-0 \\ 2-2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} = \alpha \overrightarrow{DF} + \beta \overrightarrow{DG} &\iff \begin{cases} -2 = -2\alpha - 2\beta \\ -7 = 3\alpha - 7\beta \\ 2 = 2\beta \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 1 = 0 \\ -7 = 3\alpha - 7\beta \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 0 \\ -7 = 3\alpha - 7\beta \end{cases} \end{aligned}$$

ce système n'a pas de solution, et donc ces points ne sont pas coplanaires.

- d) Nous devons déterminer si la droite $d(A; \vec{u})$ est parallèle au plan $\mathcal{P}(B; \vec{v}, \vec{w})$.

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si son vecteur directeur est dans le plan, c'est-à-dire si le vecteur directeur de la droite peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs directeurs du plan. Or, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe des réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$.

$$\begin{aligned} \text{i.e. } \begin{cases} 0 &= k+2q \\ -7 &= 2k-3q \\ 4 &= 0k-4q \end{cases} \\ \text{i.e. } \begin{cases} q &= -1 \\ k+(-2) &= 0 \\ -7 &= 2k+3 \end{cases} \\ \text{i.e. } \begin{cases} q &= -1 \\ k &= 2 \\ -7 &= 2 \times 2 + 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système n'admet pas de solutions, et donc la droite $d(A; \vec{u})$ n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}(B; \vec{v}; \vec{w})$.

- e) Nous devons déterminer si les plans $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{P}(B; \vec{u}', \vec{v}')$ sont parallèles.

Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs engendrent des plans parallèles, c'est-à-dire si tout vecteur directeur de l'un des plans peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs directeurs de l'autre plan.

Nous devons vérifier si les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du premier plan peuvent s'exprimer comme combinaisons linéaires des vecteurs directeurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ du second plan.

Cherchons d'abord s'il existe des réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha \vec{u}' + \beta \vec{v}'$.

$$\vec{u} = \alpha \vec{u}' + \beta \vec{v}' \iff \begin{cases} -1 = 13\alpha + 5\beta \\ 0 = -3\alpha - \beta \\ 2 = -2\alpha - 2\beta \end{cases}$$

De la deuxième équation : $\beta = -3\alpha$.

En substituant dans la première équation :

$$-1 = 13\alpha + 5(-3\alpha) = 13\alpha - 15\alpha = -2\alpha$$

Donc $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -3 \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.

Vérifions avec la troisième équation :

$$\begin{aligned} -2\alpha - 2\beta &= -2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= -1 + 3 \\ &= 2 \text{ ce qui est vrai.} \end{aligned}$$

Donc $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{u}' - \frac{3}{2}\vec{v}'$.

Cherchons maintenant s'il existe des réels γ et δ tels que $\vec{v} = \gamma\vec{u}' + \delta\vec{v}'$.

$$\vec{v} = \gamma\vec{u}' + \delta\vec{v}' \iff \begin{cases} 4 = 13\gamma + 5\delta \\ -1 = -3\gamma - \delta \\ 0 = -2\gamma - 2\delta \end{cases}$$

De la deuxième équation : $\delta = -3\gamma + 1$.

En substituant dans la troisième équation :

$$0 = -2\gamma - 2(-3\gamma + 1) = -2\gamma + 6\gamma - 2 = 4\gamma - 2$$

Donc $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\delta = -3 \times \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$.

Vérifions avec la première équation :

$$\begin{aligned} 13\gamma + 5\delta &= 13 \times \frac{1}{2} + 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{13}{2} - \frac{5}{2} \\ &= 4 \text{ ce qui est vrai.} \end{aligned}$$

Donc $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u}' - \frac{1}{2}\vec{v}'$.

Puisque les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du premier plan s'expriment tous deux comme combinaisons linéaires des vecteurs directeurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ du second plan, les deux plans $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{P}(B; \vec{u}', \vec{v}')$ sont parallèles.

Exercice 10

Dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal, soit $A(0; -1; 7)$, $B(3; -4; 7)$, $C(3; -1; 4)$, et $D(1; -3; 5)$.

- Placer ces points. Montrer que ABD , ADC et CDB sont des triangles rectangles isocèles.
- Trouver quatre points formant avec A , B , C et D les sommets d'un cube.

Solution de l'exercice 10

a) Placer ces points. Montrer que ABD , ADC et CDB sont des triangles rectangles isocèles.

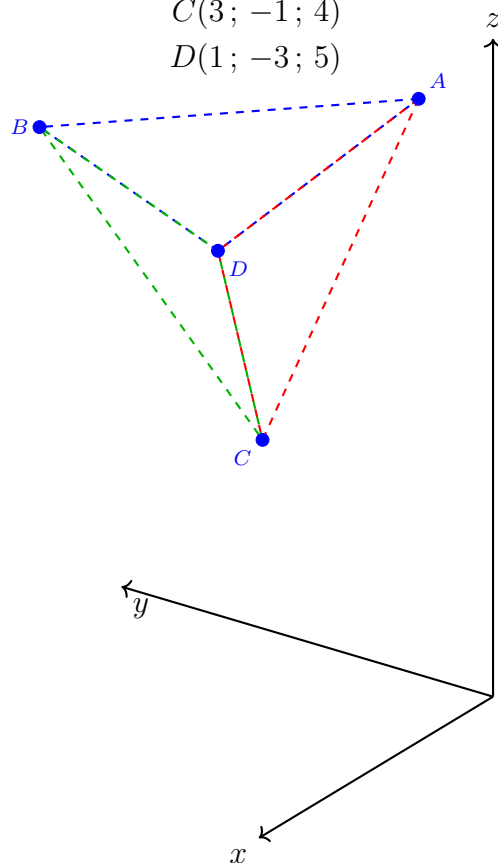
Les coordonnées des points suivants, dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, sont :

$$A(0; -1; 7)$$

$$B(3; -4; 7)$$

$$C(3; -1; 4)$$

$$D(1; -3; 5)$$



Commençons par calculer les vecteurs liés aux côtés des triangles :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-0 \\ -4-(-1) \\ 7-7 \end{pmatrix} \text{ i.e. } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 1-0 \\ -3-(-1) \\ 5-7 \end{pmatrix} \text{ i.e. } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 1-3 \\ -3-(-4) \\ 5-7 \end{pmatrix} \text{ i.e. } \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3-0 \\ -1-(-1) \\ 4-7 \end{pmatrix} \text{ i.e. } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 3-1 \\ -1-(-4) \\ 4-5 \end{pmatrix} \text{ i.e. } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3-3 \\ -1-(-4) \\ 4-7 \end{pmatrix} \text{ i.e. } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Pour montrer que les triangles sont rectangles, nous allons vérifier si les vecteurs précédents sont orthogonaux en calculant leurs produits scalaires.

- Pour le triangle ABD :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} &= 1 \times (-2) + (-2) \times 1 + (-2) \times (-2) \\ &= -2 - 2 + 4 \\ &= 0\end{aligned}$$

Le produit scalaire est nul, donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont perpendiculaires, ce qui signifie que le triangle ABD est rectangle en D .

Pour qu'un triangle rectangle soit isocèle, il faut que deux de ses côtés aient la même longueur. Calculons les normes des vecteurs :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AB}\|^2 &= 3^2 + (-3)^2 + 0^2 = 9 + 9 + 0 = 18 \\ \|\overrightarrow{AD}\|^2 &= 1^2 + (-2)^2 + (-2)^2 = 1 + 4 + 4 = 9 \\ \|\overrightarrow{BD}\|^2 &= (-2)^2 + 1^2 + (-2)^2 = 4 + 1 + 4 = 9\end{aligned}$$

Donc $\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{BD}\| = 3$, ce qui confirme que ABD est un triangle rectangle isocèle.

- Pour le triangle ADC :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} &= 1 \times 2 + (-2) \times 2 + (-2) \times (-1) \\ &= 2 - 4 + 2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Le produit scalaire est nul, donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux, ce qui signifie que le triangle ADC est rectangle en D .

Calculons les normes des vecteurs :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AC}\|^2 &= 3^2 + 0^2 + (-3)^2 = 9 + 0 + 9 = 18 \\ \|\overrightarrow{AD}\|^2 &= 1^2 + (-2)^2 + (-2)^2 = 1 + 4 + 4 = 9 \\ \|\overrightarrow{DC}\|^2 &= 2^2 + 2^2 + (-1)^2 = 4 + 4 + 1 = 9\end{aligned}$$

Donc $\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{DC}\| = 3$, ce qui confirme que ADC est un triangle rectangle isocèle.

- Pour le triangle CDB :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DB} &= (-2) \times (-2) + (-2) \times 1 + (1) \times (-2) \\ &= 4 - 2 - 2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Le produit scalaire est nul, donc $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont perpendiculaires, ce qui signifie que le triangle CDB est rectangle en D .

Calculons les normes des vecteurs :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{CD}\|^2 &= (-2)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 4 + 4 + 1 = 9 \\ \|\overrightarrow{CB}\|^2 &= 0^2 + 3^2 + (-3)^2 = 0 + 9 + 9 = 18 \\ \|\overrightarrow{DB}\|^2 &= (-2)^2 + 1^2 + (-2)^2 = 4 + 1 + 4 = 9\end{aligned}$$

Donc $\|\overrightarrow{CD}\| = \|\overrightarrow{DB}\| = 3$, ce qui confirme que CDB est un triangle rectangle isocèle.

b) Trouver quatre points formant avec A , B , C et D les sommets d'un cube.

D'après nos calculs précédents, nous savons que :

- $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux.
- $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux.
- $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont orthogonaux.

Nous avons calculé :

$$\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{BD}\| = \|\overrightarrow{DC}\| = 3$$

Ces trois vecteurs ont la même norme et sont deux à deux orthogonaux. Ils peuvent donc permettre de déterminer les sommets manquants du cube.

Calculons les coordonnées de ces points :

- Pour E : Notons $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées du point E . Alors

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EA} \iff \begin{cases} -2 = 0 - x \\ -2 = -1 - y \\ 1 = 7 - z \end{cases}$$

i.e. $E(2; 1; 6)$

- Pour F : Notons $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées du point F . Alors

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FC} \iff \begin{cases} -2 = 3 - x \\ 1 = -1 - y \\ -2 = 4 - z \end{cases}$$

i.e. $F(5; -2; 6)$

- Pour G : Notons $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées du point G . Alors

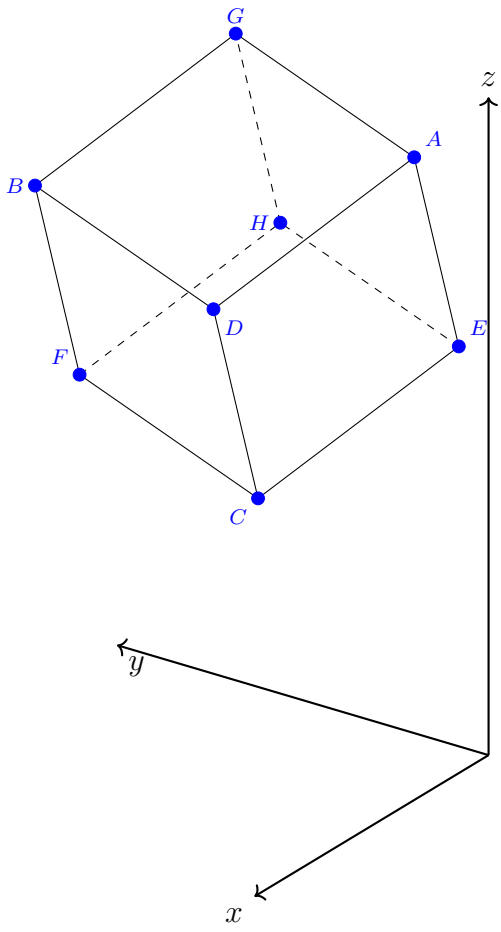
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BG} \iff \begin{cases} -1 = -3 - x \\ -2 = -4 - y \\ -2 = 7 - z \end{cases}$$

i.e. $G(2; -2; 9)$

- Pour H : Notons $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées du point H . Alors

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HG} \iff \begin{cases} -2 = 2 - x \\ -2 = -2 - y \\ 1 = 9 - z \end{cases}$$

i.e. $H(4; 0; 8)$



Séquence XII – Géométrie dans l'espace

Représentations paramétriques



Exercice 11

L'espace étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Donner une représentation paramétrique...

- de la droite (AB) où $A(2; 1; 3)$ et $B(-1; 0; 4)$.
- de la droite parallèle à la droite (AB) de la question a) passant par $C(2; 5; -2)$.

Solution de l'exercice 11

- Pour déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) , nous avons besoin d'un point de la droite et d'un vecteur directeur de la droite.
Nous utiliserons le point $A(2; 1; 3)$ comme point de référence, et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur.
Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1-2 \\ 0-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} \text{ i.e. } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc :

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Pour déterminer la représentation paramétrique de la droite parallèle à (AB) et passant par C , nous pouvons utiliser le même vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ et le point C comme point de référence.
Une représentation paramétrique de la droite passant par C et parallèle à (AB) est donc :

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$



Exercice 12

L'espace étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
on considère $A(1; 3; 2)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- Donner une représentation paramétrique de la droite $d(A; \vec{u})$.
- Les points $B(4; -9; 8)$, $C(-1; 10; -2)$ et $F\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$ sont-ils des points de la droite $d(A; \vec{u})$?
- La droite $d(A; \vec{u})$ admet-elle un point de cote $\sqrt{2}$? Si oui, déterminer ses coordonnées.

Solution de l'exercice 12

- Le premier cas est une application directe de la définition du cours. On a $A(1; 3; 2)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc une représentation paramétrique de la droite $d(A; \vec{u})$ est

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Pour vérifier si un point appartient à la droite $d(A; \vec{u})$, nous devons déterminer s'il existe une valeur de t telle que les coordonnées du point vérifient le système d'équations paramétrique que nous avons établi.

$$B \in d(A; \vec{u}) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 4 = 1 - t \\ -9 = 3 + 4t \\ 8 = 2 - 2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ t = -3 \end{cases}$$

Donc $B \in d(A; \vec{u})$.

De même,

$$C \in d(A; \vec{u}) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} -1 = 1 - t \\ 10 = 3 + 4t \\ -2 = 2 - 2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{7}{4} \\ t = 2 \end{cases}$$

Donc $C \notin d(A; \vec{u})$.

Enfin,

$$F \in d(A; \vec{u}) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{5}{3} = 1 - t \\ \frac{1}{3} = 3 + 4t \\ \frac{10}{3} = 2 - 2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc $F \in d(A; \vec{u})$.

c) Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
 N(x; y; \sqrt{2}) &\in d(A; \vec{u}) \\
 \iff \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= 1 - k \\ y &= 3 + 4k \\ \sqrt{2} &= 2 - 2k \end{cases} \\
 \iff \begin{cases} k &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y &= 3 + 4\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ x &= 1 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\
 \iff \begin{cases} k &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y &= 7 - 2\sqrt{2} \\ x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 7 - 2\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \in d(A; \vec{u})$, et donc $d(A; \vec{u})$ admet un point de cote $\sqrt{2}$.

Exercice 13

L'espace étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace définis par :

- a) Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = 7 - 3k \\ y = 2 + k \\ z = k - 1 \end{cases}$.
- b) Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = -2 + k \\ y = 3 \\ z = 4k \end{cases}$.

Solution de l'exercice 13

a) Cet ensemble est une droite passant par le point

$$A(7; 2; -1) \text{ et de vecteur directeur } \vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Cet ensemble est une droite passant par le point

$$A(-2; 3; 0) \text{ et de vecteur directeur } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 14

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer la position relative des droites (d) et (d') dont on donne des représentations paramétriques.

Dans le cas où les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles, étudier si elles sont perpendiculaires.

- a) $(d) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = t \end{cases}$ et $(d') : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$
- b) $(d) : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ et $(d') : \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -6 - t \end{cases}$
- c) $(d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = 5 + 6t \end{cases}$ et $(d') : \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -1 + 6t \\ z = 11 - 9t \end{cases}$
- d) $(d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = 5 + 6t \end{cases}$ et $(d') : \begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = 7 + 15t \\ z = -3 - 12t \end{cases}$
- e) $(d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = t \end{cases}$ et $(d') : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$

Solution de l'exercice 14

Rappels :

- Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires.
- Deux droites sont sécantes si et seulement si elles ne sont pas parallèles et si le système formé par leurs équations paramétriques admet une solution.
- Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux, c'est-à-dire si leur produit scalaire est nul, et si elles sont sécantes.
- Deux droites sont non coplanaires si et seulement si elles ne sont ni parallèles ni sécantes.

Pour chaque cas, nous allons :

1. Déterminer les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des droites (d) et (d') .
2. Examiner si ces vecteurs sont colinéaires (droites parallèles).
3. Si les droites ne sont pas parallèles, vérifier si elles sont sécantes en résolvant le système d'équations correspondant.
4. Si les droites ne sont pas parallèles, vérifier si elles sont perpendiculaires en calculant le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs.

1. Les vecteurs directeurs sont :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\vec{v} = -\vec{u}$, donc $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Les droites (d) et (d') sont donc parallèles.

Pour déterminer si elles sont confondues, on vérifie si un point de (d) appartient à (d') . Prenons par exemple le point $A(2, 4, 0)$ sur (d) (pour $t = 0$).

Si A appartient à (d') , il existe t' tel que :

$$\begin{cases} 2 = -1 - 3t' \\ 4 = 2 - 2t' \\ 0 = -1 - t' \end{cases}$$

De la troisième équation, on a $t' = -1$. Vérifions les autres équations :

$$\begin{aligned} -1 - (-1) &= 0 \neq 2 \\ 2 - 2(-1) &= 4 \end{aligned}$$

La première équation n'est pas vérifiée pour $t' = -1$, donc A n'appartient pas à (d') .

(d) et (d') sont donc strictement parallèles.

2. Les vecteurs directeurs sont :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier si les vecteurs sont colinéaires, on examine s'il existe $k \neq 0$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Si tel est le cas :

$$\begin{cases} -3 = 2k \\ 1 = 2k \\ 2 = -k \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solutions. Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites ne sont pas parallèles.

Vérifions si les droites sont sécantes en cherchant s'il existe des valeurs de t et t' telles que :

$$\begin{cases} 2 - 3t = 7 + 2t' \\ 1 + t = 2 + 2t' \\ -3 + 2t = -6 - t' \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} -3t - 2t' = 5 \\ t - 2t' = 1 \\ 2t + t' = -3 \end{cases}$$

À partir de la deuxième équation, on a $t = 1 + 2t'$. En substituant dans (3) : $2(1 + 2t') + t' = -3$, i.e. $2 + 4t' + t' = -3$ i.e. $5t' = -5$ i.e. $t' = -1$.

On obtient donc $t' = -1$ et, en remplaçant dans la deuxième équation : $t = 1 + 2(-1) = 1 - 2 = -1$.

Vérifions si ces valeurs satisfont la première équation : $-3(-1) - 2(-1) = 3 + 2 = 5$

Les droites sont donc sécantes. Le point d'intersection a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = 2 - 3(-1) = 2 + 3 = 5 \\ y = 1 + (-1) = 0 \\ z = -3 + 2(-1) = -3 - 2 = -5 \end{cases}$$

Vérifions si les droites sont perpendiculaires en calculant le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (-3) \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times (-1) \\ &= -6 + 2 - 2 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, les droites ne sont pas perpendiculaires.

(d) et (d') sont sécantes et non perpendiculaires

3. Les vecteurs directeurs sont :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$, donc $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Les droites (d) et (d') sont donc parallèles.

Pour déterminer si elles sont confondues, on vérifie si un point de (d) appartient à (d') . Prenons par exemple le point $A(1, 3, 5)$ sur (d) (pour $t = 0$).

Si A appartient à (d') , il existe t' tel que :

$$\begin{cases} 1 = 3 - 3t' \\ 3 = -1 + 6t' \\ 5 = 11 - 9t' \end{cases}$$

De la première équation, on a $1 = 3 - 3t'$, i.e. $-2 = -3t'$, i.e. $t' = \frac{2}{3}$.

Vérifions avec la deuxième équation :

$$-1 + 6 \times \frac{2}{3} = -1 + 4 = 3$$

Vérifions avec la troisième équation :

$$11 - 9 \times \frac{2}{3} = 11 - 6 = 5$$

Toutes les équations sont vérifiées pour $t' = \frac{2}{3}$, donc A appartient à (d') .

Donc (d) et (d') sont donc confondues.

4. Les vecteurs directeurs sont :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier si les vecteurs sont colinéaires, on examine s'il existe $k \neq 0$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

$$\begin{cases} 2 = 6k \\ -4 = 15k \\ 6 = -12k \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ k = -\frac{4}{15} \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution, donc les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont donc pas parallèles.

Vérifions si les droites sont sécantes en cherchant s'il existe des valeurs de t et t' telles que :

$$\begin{cases} 1 + 2t = 5 + 6t' \\ 3 - 4t = 7 + 15t' \\ 5 + 6t = -3 - 12t' \end{cases}$$

De la première équation : $1 + 2t = 5 + 6t'$,
i.e. $2t - 6t' = 4$ (1)

De la deuxième équation : $3 - 4t = 7 + 15t'$
i.e. $-4t - 15t' = 4$ (2)

De la troisième équation : $5 + 6t = -3 - 12t'$
i.e. $6t + 12t' = -8$ (3)

De (1), on obtient $t = 2 + 3t'$. En substituant dans (2) : $-4(2 + 3t') - 15t' = 4$, i.e. $-8 - 12t' - 15t' = 4$
i.e. $-27t' = 12$ i.e. $t' = -\frac{12}{27} = -\frac{4}{9}$.

En remplaçant dans (1) :

$$\begin{aligned} t &= 2 + 3 \left(-\frac{4}{9} \right) \\ &= 2 - \frac{4}{3} \\ &= \frac{6 - 4}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Vérifions si ces valeurs satisfont l'équation (3) :

$$\begin{aligned} 6 \times \frac{2}{3} + 12 \times \left(-\frac{4}{9} \right) &= 4 - \frac{16}{3} \\ &= \frac{12 - 16}{3} \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Or, on aurait dû trouver -8 . Donc les valeurs ne satisfont pas la troisième équation et ainsi le système n'a pas de solution.

Les droites (d) et (d') ne sont donc pas sécantes, et comme elles ne sont pas parallèles, elles sont non coplanaires.

Vérifions si les droites sont orthogonales en calculant le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \times 6 + (-4) \times 15 + 6 \times (-12) \\ &= 12 - 60 - 72 \\ &= -120 \end{aligned}$$

Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, les droites ne sont pas orthogonales.

Ainsi (d) et (d') sont non coplanaires.

5. Les vecteurs directeurs sont :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier si les vecteurs sont colinéaires, on examine s'il existe $k \neq 0$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

$$\begin{cases} 2 = 2k \\ -3 = k \\ 1 = -k \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} k = 1 \\ k = -3 \\ k = -1 \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solutions, donc les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont donc pas parallèles.

Vérifions si les droites sont sécantes en cherchant des valeurs de t et t' telles que :

$$\begin{cases} 1 + 2t = 3 + 2t' \\ 2 - 3t = -1 + t' \\ t = 1 - t' \end{cases}$$

De la troisième équation : $t = 1 - t'$ (3)

En substituant dans la première : $1 + 2(1 - t') = 3 + 2t'$,
i.e. $1 + 2 - 2t' = 3 + 2t'$ i.e. $3 - 2t' = 3 + 2t'$ i.e. $-4t' = 0$
i.e. $t' = 0$.

De (3), on obtient $t = 1 - 0 = 1$.

Vérifions avec la deuxième équation : $2 - 3 \times 1 = -1 + 0 \Rightarrow -1 = -1$

Les droites sont donc sécantes. Le point d'intersection a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \times 1 = 3 \\ y = 2 - 3 \times 1 = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vérifions si les droites sont perpendiculaires en calculant le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \times 2 + (-3) \times 1 + 1 \times (-1) \\ &= 4 - 3 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, donc les vecteurs sont orthogonaux.

Ainsi (d) et (d') sont perpendiculaires.

Exercice 15

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, donner une représentation paramétrique du plan (ABC) où $A(-1; 2; 3)$, $B(-3; 0; 4)$ et $C(5; -2; 1)$.

Solution de l'exercice 15

- $A(-1; 2; 3)$
- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3+1 \\ 0-2 \\ 4-3 \end{pmatrix}$ i.e. $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5+1 \\ -2-2 \\ 1-3 \end{pmatrix}$ i.e. $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires, donc

$$(ABC) = \mathcal{P} \left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right).$$

Ainsi, une représentation paramétrique du plan (ABC) est

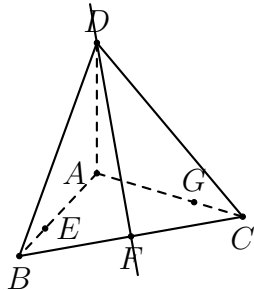
$$\begin{cases} x = -1 - 2t + 6t' \\ y = 2 - 2t - 4t' \\ z = 3 + t - 2t' \end{cases} \quad (t; t') \in \mathbb{R}^2.$$

Séquence XII – Géométrie dans l'espace

Exercices de synthèse

Exercice 16

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC , ACD et ABD sont des triangles rectangles isocèles en A .



On désigne par E , F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de l'espace.

- On désigne par P le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF) . On note H le point d'intersection du plan P et de la droite (DF) .

- Donner les coordonnées des points D et F .
- Donner une représentation paramétrique de la droite (DF) .
- Déterminer une équation cartésienne du plan P .
- Calculer les coordonnées du point H .
- Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

- On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$ avec $\alpha \in [0; \pi]$. Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

- Démontrer que $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.
- Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M .
En déduire que $ME \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
- Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.
- Conclure.

Solution de l'exercice 16

- (a) Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, D a pour coordonnées $(0; 0; 1)$.

Comme $B(1; 0; 0)$ et $C(0; 1; 0)$,

F milieu de $[BC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$, soit $F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

- $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_F - x_D \\ y_F - y_D \\ z_F - z_D \end{pmatrix}$,

i.e. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$. De plus, $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur

directeur de la droite (DF) . D est un point de la droite (DF) donc une représentation paramétrique de cette droite est donnée par :

$$\begin{cases} x = \frac{t}{2} \\ y = \frac{t}{2} \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- $\mathcal{P}$ est un plan orthogonal à la droite (DF) donc $\overrightarrow{DF}$, vecteur directeur de (DF) , est aussi un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ de vecteur normal de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est de la forme

$$ax + by + cz + d = 0$$

avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$. Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donc de la forme $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z + d = 0$. Or, P passe par le point A , origine du repère, donc $d = 0$ et P a pour équation

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z = 0$$

- H étant le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de (DF) , ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z = 0 \\ x = \frac{t}{2} \\ y = \frac{t}{2} \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$\text{soit } \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{2} - (1-t) = 0$$

$$\text{i.e. } \frac{t}{2} \cdot 1 - 1 + t = 0 \text{ i.e. } \frac{3t}{2} - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}.$$

On en déduit que

$$H \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

(e) E et G sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[CA]$ donc $E\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ et $G\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$.

$$\text{De plus, } H\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Méthode 1 : Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$,

$$\begin{aligned} EG^2 &= (x_G - x_E)^2 + (y_G - y_E)^2 + (z_G - z_E)^2 \\ &= \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + (0 - 0)^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EH^2 &= (x_H - x_E)^2 + (y_H - y_E)^2 + (z_H - z_E)^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} GH^2 &= (x_H - x_G)^2 + (y_H - y_G)^2 + (z_H - z_G)^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

donc $GH^2 + EH^2 = EG^2$ donc le triangle EHG est rectangle en H , donc $\widehat{EHG}$ est droit.

Méthode 2 : Dans le repère $(\vec{A}; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$,

$$\overrightarrow{EH} \begin{pmatrix} x_H - x_E \\ y_H - y_E \\ z_H - z_E \end{pmatrix} \text{ i.e. } \overrightarrow{EH} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} x_H - x_G \\ y_H - y_G \\ z_H - z_G \end{pmatrix} \text{ i.e. } \overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Le repère étant orthonormé,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GH} &= \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{18} - \frac{1}{18} + \frac{1}{9} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont orthogonaux donc $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

$$2. \quad (a) \quad D(0; 0; 1), F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) \text{ et } \overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot M$$

est un point de la droite (DF) et t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$.

donc

$$\begin{cases} x_M - 0 = t \times \frac{1}{2} \text{ i.e. } x_M = \frac{t}{2} \\ y_M - 0 = t \times \frac{1}{2} \text{ i.e. } y_M = \frac{t}{2} \\ z_M - 1 = t \times (-1) \text{ i.e. } z_M = 1 - t \end{cases}$$

$$M\left(\frac{t}{2}; \frac{t}{2}; 1-t\right) \text{ et } E\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right) \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} ME^2 &= (x_E - x_M)^2 + (y_E - y_M)^2 + (z_E - z_M)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{t}{2}\right)^2 + (0 - (1-t))^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{4} + 1 - 2t + t^2 \\ &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$(b) \quad M\left(\frac{t}{2}; \frac{t}{2}; 1-t\right) \text{ et } G\left(0; \frac{1}{2}; 0\right), \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} MG^2 &= (x_G - x_M)^2 + (y_G - y_M)^2 + (z_G - z_M)^2 \\ &= \left(0 - \frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)^2 + (0 - (1-t))^2 \\ &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4} \\ &= ME^2 \end{aligned}$$

$MG^2 = ME^2$ et comme $MG > 0$ et $ME > 0$, alors $MG = ME$. Donc le triangle MEG est isocèle en M . Dans le triangle EMG , appelons I le milieu de $[EG]$. Le triangle étant isocèle en M , I est le pied de la hauteur issue de M et le triangle EIM est rectangle en I . Ainsi

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{IE}{ME}$$

Or I est le milieu de $[EG]$ et donc

$$IE = \frac{EG}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

On en déduit que $ME \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

(c) $\alpha \in [0; \pi]$ donc $\frac{\alpha}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Soit f définie sur $[0; \pi]$ par $f(\alpha) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

f est une fonction composée de la forme

$f = \sin \circ u$, dérivable sur $[0; \pi]$.

$f' = u' \times \cos \circ u$ et donc

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Or, $\frac{\alpha}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geq 0$ d'où $f'(\alpha) \geq 0$ et f' s'annule uniquement en $\alpha = \pi$.
Donc $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$.

La fonction f est strictement croissante sur $[0; \pi]$. α est maximal si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.

M appartient à (DF) , or (EG) et (DF) ne sont pas coplanaires donc M ne peut pas appartenir à (EG) donc $\alpha \neq 0$ et donc $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq 0$,

i.e. $ME \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} > 0$. α est maximal si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal. Par

passage à l'inverse, la fonction $\alpha \mapsto \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ est de variations contraire à f donc α est maximal si et seulement si $\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ est minimal.

Comme $\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{ME}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2} \times ME$, α est

maximale si et seulement si ME est minimale.

Or, la fonction carrée est une fonction strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc α est maximal si et seulement si ME^2 est minimale.

(d) Déterminons l'extremum de la fonction g définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $g(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.

Avec $a = \frac{3}{2}$, qui est strictement positif, $b = -\frac{5}{2}$ et $c = \frac{5}{4}$, cette fonction polynôme du second degré de la forme $at^2 + bt + c$ atteint son minimum en

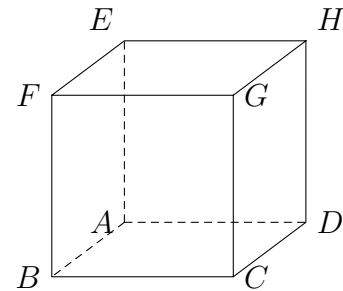
$$t_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{5}{2}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{5}{6}$$

Or $M\left(\frac{t}{2}; \frac{t}{2}; 1-t\right)$, les coordonnées du point

M sont alors $M\left(\frac{5}{12}; \frac{5}{12}; \frac{1}{6}\right)$, position du point M pour laquelle α , donc EM , est minimale.

Exercice 17

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous d'arête de longueur 1.



On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On considère les points $I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$, $J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$ et $L\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ) .
- On admet que (KL) a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}u \\ y = u \\ z = 1 - u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes.

Partie B

- Justifier que les points I, J et K déterminent un plan.
- Le point $R\left(1; 1; -\frac{6}{5}\right)$ appartient-il à ce plan?

Partie C

- Montrer que le point L appartient à la droite (CD) .
- Démontrer que le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme.

Partie A :

1. Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(1; \frac{1}{3}; -1\right)$.

Le point M , de coordonnées $(x; y; z)$, est sur la droite (IJ) si et seulement si $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires, i.e., puisque $\overrightarrow{IJ}$ n'est pas le vecteur nul, si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{IJ}$. D'où le système :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{3} \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

2. On résout le système

$$\begin{cases} t = 1 - u \\ \frac{t}{3} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}u \\ -t + 1 = -1 - u \end{cases}$$

Il est équivalent à

$$\begin{cases} t = 1 - u \\ \frac{1 - u}{3} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}u \\ -(1 - u) + 1 = -1 - u \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} t = 1 - u \\ \frac{1}{3} - \frac{u}{3} = \frac{1}{3} - \frac{4u}{3} \\ u = -1 - u \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} t = 1 - u \\ \frac{-u}{3} = \frac{-4u}{3} \\ 2u = -1 \end{cases}$$

On trouve alors $u = -\frac{1}{2}$ et $t = \frac{3}{2}$. De plus, le système est cohérent, donc les deux droites sont sécantes.

Partie B :

1. Les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont respectivement $\left(1; \frac{1}{3}; -1\right)$ et $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}; -1\right)$. Elles ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, les points I , J et K définissent donc un plan.

2. Les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IR}$ sont respectivement $\left(1; \frac{1}{3}; -1\right)$, $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}; -1\right)$ et $\left(0; \frac{2}{3}; -\frac{6}{5}\right)$. Pour montrer que ces trois vecteurs sont coplanaires, il faut et il suffit de prouver que l'un d'eux, par exemple $\overrightarrow{IR}$, est une combinaison linéaire des deux autres, c'est-à-dire montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{IJ} + a\overrightarrow{IK} = b\overrightarrow{IR}$. Cela se traduit par le système :

$$\begin{cases} 1 + \frac{a}{4} = 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{a}{3} = \frac{2b}{3} \\ -1 - a = -\frac{6b}{5} \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} a = -4 \\ \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2b}{3} \\ -1 + 4 = -\frac{6b}{5} \end{cases}$$

Le système est cohérent et on trouve

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Les réels a et b existent bien, donc les trois vecteurs sont coplanaires. On peut en déduire que les quatre points I , J , K et R sont coplanaires, et que donc le point R est dans le plan (IJK) .

Partie C :

1. Les coordonnées de $\overrightarrow{CL}$ et de $\overrightarrow{CD}$ sont respectivement $\left(-\frac{3}{4}; 0; 0\right)$ et $(-1; 0; 0)$. Donc $\overrightarrow{CL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$. Ces deux vecteurs étant colinéaires, les trois points C , D et L sont alignés, donc L est sur la droite (CD) .
2. Les coordonnées de $\overrightarrow{IK}$ sont $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}; -1\right)$ et celles de $\overrightarrow{LJ}$ aussi. Donc $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{LJ}$, donc $(IKJL)$ est un parallélogramme.

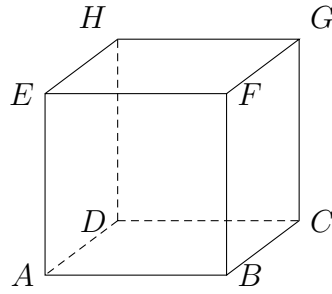
Séquence XII – Géométrie dans l'espace

Exercices supplémentaires



Exercice 18

Soit $ABCDEFGH$ le cube ci-contre. Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires ?



1. $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{BF}$
2. $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BH}$
3. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EG}$

On note I le milieu de $[FG]$, R le point tel que $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et S le point tel que $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

4. Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont colinéaires.
5. Que peut-on en déduire pour les points R, S, E et I et pour les vecteurs $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{ES}$?
6. Construire le milieu J de $[EB]$, puis prouver que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

Solution de l'exercice 18

1. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GE} \\ &= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{EG}\end{aligned}$$

Or, d'après les propriétés du cube, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$.
Donc

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{EG}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont coplanaires.

2. D'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}$$

Or, $\overrightarrow{DH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DA}$ et à $\overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $(DH) \perp (DC)$). Donc la droite (DH) est perpendiculaire au plan (BAD) , et ainsi il n'existe pas de combinaison linéaire permettant d'exprimer $\overrightarrow{DH}$ grâce aux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont non-coplanaires.

3. On sait que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont coplanaires.

4. Calculons $\overrightarrow{RS}$:

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BS}$$

Avec $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RB} &= \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Et $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

Donc :

$$\overrightarrow{RS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

Calculons $\overrightarrow{EI}$ où I est le milieu de $[FG]$:

$$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FI}$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

Donc :

$$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

On obtient

$$\overrightarrow{RS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EI}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont colinéaires.

5. Puisque $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont colinéaires, les droites (RS) et (EI) sont parallèles. Or, deux droites strictement parallèles définissent un unique plan. Donc les points R, S, E et I sont coplanaires. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{ES}$ sont également coplanaires.

6. Le milieu J de $[EB]$ vérifie : $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$.

On sait que

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EJ}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IE} &= -\overrightarrow{EI} \\ &= -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EJ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} \\ &= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

Donc :

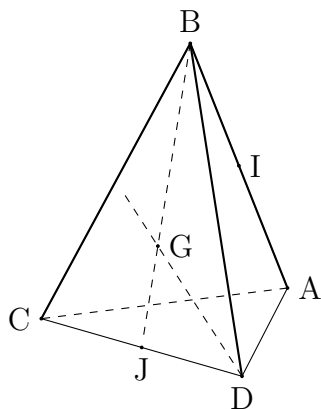
$$\begin{aligned}\vec{IJ} &= -\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AE} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AE} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{EF} - \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{AE}) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{EF} - \frac{1}{2}\vec{BG}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{EF}$, $\vec{BG}$ et $\vec{IJ}$ sont coplanaires.



Exercice 19

$(ABCD)$ est le tétraèdre ci-dessous.



I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$ et $[CD]$. G est le centre de gravité du triangle BCD . Démontrer que les points A , G , I et J sont coplanaires.

Solution de l'exercice 19

Pour démontrer que quatre points sont coplanaires, nous allons montrer que les vecteurs $\vec{AG}$, $\vec{AI}$ et $\vec{AJ}$ sont coplanaires, c'est-à-dire qu'il existe des réels α et β tels que :

$$\vec{AG} = \alpha\vec{AI} + \beta\vec{AJ}$$

I est le milieu de $[AB]$, donc

$$\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$$

J est le milieu de $[CD]$, donc

$$\vec{AJ} = \vec{AC} + \vec{CJ} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CD}$$

Donc

$$\begin{aligned}\vec{AJ} &= \vec{AC} + \vec{CJ} \\ &= \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CD} \\ &= \vec{AC} + \frac{1}{2}(\vec{AD} - \vec{AC}) \\ &= \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AC} \\ &= \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD}\end{aligned}$$

G est le centre de gravité du triangle BCD , donc

$$\vec{BG} = \frac{1}{3}(\vec{BC} + \vec{BD})$$

Pour exprimer $\vec{AG}$, utilisons la relation de Chasles :

$$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BG}$$

Donc :

$$\vec{AG} = \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{BC} + \vec{BD})$$

Exprimons $\vec{BC}$ et $\vec{BD}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$:

- $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$
- $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$

Donc

$$\begin{aligned}\vec{AG} &= \vec{AB} + \frac{1}{3}[(\vec{AC} - \vec{AB}) + (\vec{AD} - \vec{AB})] \\ &= \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{AD} - 2\vec{AB}) \\ &= \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AD} - \frac{2}{3}\vec{AB} \\ &= \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AD} \\ &= \frac{1}{3} \times 2\vec{AI} + \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{AD}) \\ &= \frac{2}{3}\vec{AI} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD}) \\ &= \frac{2}{3}\vec{AI} + \frac{2}{3}\vec{AJ}\end{aligned}$$

Puisque $\vec{AG}$ s'exprime comme combinaison linéaire de $\vec{AI}$ et $\vec{AJ}$, les vecteurs $\vec{AG}$, $\vec{AI}$ et $\vec{AJ}$ sont coplanaires. Par conséquent, les points A , G , I et J sont coplanaires.

Cette propriété illustre un résultat :

Dans un tétraèdre, le plan contenant les milieux de deux arêtes opposées et le centre de gravité d'une face passe toujours par le sommet opposé à cette face.

Exercice 20

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$:

- Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) si $A(-1; 2; 3)$ et $B(-3; 0; 4)$.
- Déterminer les coordonnées d'un point H et celles d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D) ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$$

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D') passant par le point $K(1; -3; 2)$ et parallèle à la droite (D) .

Solution de l'exercice 20

- Pour déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) , nous avons besoin d'un point de la droite (ici $A(-1; 2; 3)$) et d'un vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

$$\text{Or } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 - (-1) \\ 0 - 2 \\ 4 - 3 \end{pmatrix} \text{ i.e. } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc :

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- Pour la droite (D) ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 5 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Un point de cette droite est obtenu pour n'importe quelle valeur de t . Pour $t = 0$, nous obtenons le point $H(-3; 2; 5)$.

Le vecteur directeur $\vec{u}$ est donné par les coefficients de t dans les équations paramétriques : $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- Pour déterminer une représentation paramétrique de la droite (D') passant par le point $K(1; -3; 2)$ et parallèle à la droite (D) , nous utilisons :

- Le point $K(1; -3; 2)$

- Le même vecteur directeur que (D) : $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

La représentation paramétrique de la droite (D') est donc :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 - 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Exercice 21

Déterminer les positions relatives respectives des paires suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } (D_1) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 9 - 3t \\ z = -9 + 4t \end{cases} & (D_2) : \begin{cases} x = 8 + 3u \\ y = 5 + 2u \\ z = -2 - u \end{cases} \\ \text{b) } (D_1) : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 + 6t \end{cases} & (D_2) : \begin{cases} x = 5 + 6u \\ y = 3 - 3u \\ z = 2 - 9u \end{cases} \\ \text{c) } (D_1) : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 5 - 2t \end{cases} & (D_2) : \begin{cases} x = -1 + 4u \\ y = 2 - 2u \\ z = 6 + 3u \end{cases} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 21

Rappels :

- Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Deux droites sont sécantes si et seulement si elles ne sont pas parallèles et si le système formé par leurs équations paramétriques admet une solution.
- Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux, c'est-à-dire si leur produit scalaire est nul, et si elles sont sécantes.
- Deux droites sont non coplanaires si et seulement si elles ne sont ni parallèles ni sécantes.

Pour chaque cas, nous allons :

- Déterminer les vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ des droites (D_1) et (D_2) .
- Examiner si ces vecteurs sont colinéaires (droites parallèles).
- Si les droites ne sont pas parallèles, vérifier si elles sont sécantes en résolvant le système d'équations correspondant.
- Si les droites ne sont pas parallèles, vérifier si elles sont perpendiculaires en calculant le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs.

- a) Les vecteurs directeurs sont :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier si les vecteurs sont colinéaires, on examine s'il existe $k \neq 0$ tel que $\vec{u}_2 = k\vec{u}_1$. Si tel est le cas :

$$\begin{cases} 3 = 2k \\ 2 = -3k \\ -1 = 4k \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ k = -\frac{2}{3} \\ k = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solutions, donc les droites ne sont pas parallèles.

Vérifions si les droites sont sécantes en cherchant des valeurs de t et u telles que :

$$\begin{cases} 1 + 2t = 8 + 3u \\ 9 - 3t = 5 + 2u \\ -9 + 4t = -2 - u \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 2t - 3u = 7 \\ -3t - 2u = -4 \\ 4t + u = 7 \end{cases}$$

De la troisième équation, on a $u = 7 - 4t$. En substituant dans la première : $2t - 3(7 - 4t) = 7$, c'est-à-dire $2t - 21 + 12t = 7$ c'est-à-dire $14t = 28$ c'est-à-dire $t = 2$.

On obtient donc $t = 2$ et, en remplaçant dans la troisième équation : $u = 7 - 4(2) = 7 - 8 = -1$.

Vérifions si ces valeurs satisfont la deuxième équation : $-3(2) - 2(-1) = -6 + 2 = -4$

Les droites sont donc sécantes. Le point d'intersection a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = 1 + 2(2) = 5 \\ y = 9 - 3(2) = 3 \\ z = -9 + 4(2) = -1 \end{cases}$$

Vérifions si les droites sont perpendiculaires en calculant le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs :

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 &= 2 \times 3 + (-3) \times 2 + 4 \times (-1) \\ &= 6 - 6 - 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Comme $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \neq 0$, les droites ne sont pas perpendiculaires.

(D_1) et (D_2) sont sécantes et non perpendiculaires.

b) Les vecteurs directeurs sont :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\vec{u}_2 = -\frac{3}{2}\vec{u}_1$, donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires.

En effet :

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} \times (-4) = 6 \\ -\frac{3}{2} \times 2 = -3 \\ -\frac{3}{2} \times 6 = -9 \end{cases}$$

Les droites (D_1) et (D_2) sont donc parallèles.

Pour déterminer si elles sont confondues, on vérifie si un point de (D_1) appartient à (D_2) . Prenons par exemple le point $A(1; 2; 4)$ sur (D_1) (pour $t = 0$).

Si A appartient à (D_2) , il existe u tel que :

$$\begin{cases} 1 = 5 + 6u \\ 2 = 3 - 3u \\ 4 = 2 - 9u \end{cases}$$

De la première équation, on a $1 = 5 + 6u$, c'est-à-dire $6u = -4$, c'est-à-dire $u = -\frac{2}{3}$.

Vérifions les autres équations :

$$\begin{aligned} 3 - 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) &= 3 + 2 = 5 \neq 2 \\ 2 - 9 \times \left(-\frac{2}{3}\right) &= 2 + 6 = 8 \neq 4 \end{aligned}$$

Les autres équations ne sont pas vérifiées pour $u = -\frac{2}{3}$, donc A n'appartient pas à (D_2) .

(D_1) et (D_2) sont donc parallèles non confondues.

c) Les vecteurs directeurs sont :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier si les vecteurs sont colinéaires, on examine s'il existe $k \neq 0$ tel que $\vec{u}_2 = k\vec{u}_1$. Si tel est le cas :

$$\begin{cases} 4 = 3k \\ -2 = -k \\ 3 = -2k \end{cases}$$

De la deuxième équation, on a $k = 2$. Vérifions avec les autres équations :

$$\begin{aligned} 3 \times 2 &= 6 \neq 4 \\ -2 \times 2 &= -4 \neq 3 \end{aligned}$$

Ce système n'admet pas de solutions. Donc les droites ne sont pas parallèles.

Vérifions si les droites sont sécantes en cherchant des valeurs de t et u telles que :

$$\begin{cases} 2 + 3t = -1 + 4u \\ 4 - t = 2 - 2u \\ 5 - 2t = 6 + 3u \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 3t - 4u = -3 \\ -t + 2u = -2 \\ -2t - 3u = 1 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on a $t = 2u + 2$. En substituant dans la première : $3(2u + 2) - 4u = -3$, c'est-à-dire $6u + 6 - 4u = -3$ c'est-à-dire $2u = -9$ c'est-à-dire $u = -\frac{9}{2}$.

On obtient donc $u = -\frac{9}{2}$ et, en remplaçant dans la deuxième équation : $t = 2 \times \left(-\frac{9}{2}\right) + 2 = -9 + 2 = -7$.

Vérifions si ces valeurs satisfont la troisième équation :

$$-2(-7) - 3 \times \left(-\frac{9}{2}\right) = 14 + \frac{27}{2} = \frac{28 + 27}{2} = \frac{55}{2} \neq 1$$

Les valeurs ne satisfont pas la troisième équation, donc le système n'a pas de solution.

Les droites (D_1) et (D_2) ne sont donc pas sécantes, et comme elles ne sont pas parallèles, elles sont non coplanaires.

Vérifions si les droites sont orthogonales en calculant le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs :

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 &= 3 \times 4 + (-1) \times (-2) + (-2) \times 3 \\ &= 12 + 2 - 6 \\ &= 8\end{aligned}$$

Comme $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \neq 0$, les droites ne sont pas orthogonales.

Ainsi (D_1) et (D_2) sont non coplanaires.

A placer en regardant le polycopié de Christophe

Démonstration. à passer en exercices Soit A un point de (Δ) et soit (Δ_A) la droite parallèle à la droite (d) passant par le point A .

Si (Δ_A) était sécante à (P) , comme (d) est parallèle à (Δ_A) , alors (d) serait aussi sécante à (P) : or (d) est parallèle à (P) par hypothèse, donc (Δ_A) est parallèle à (P) et comme elle a le point A en commun avec (P) alors (Δ_A) est contenue dans (P) .

Par le même raisonnement, on montre que (Δ_A) est contenue dans (P') .

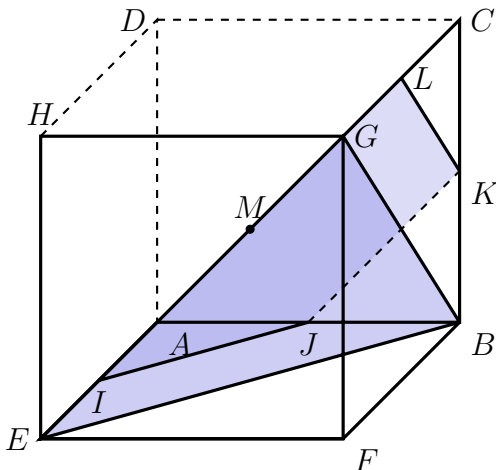
Ainsi la droite (Δ_A) est contenue dans (P) et (P') ; or (P) et (P') sont sécants selon (Δ) , donc $(\Delta) = (\Delta_A)$, et donc la droite (Δ) est parallèle à la droite (d) . $\square$

Exemple :

$ABCDEFGH$ est un cube. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes $[AE], [AB], [BC]$ et $[CG]$.

Montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.

Montrer que le plan (IJK) est parallèle au plan (EBG) .



Donner une équation du plan perpendiculaire à l'axe des abscisses et passant par $B(-2; 0; 0)$.

Question : Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit (d) :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) avec les plans de coordonnées, c'est-à-dire les plans d'équation $x = 0, y = 0$ et $z = 0$.

■ PROPRIÉTÉ :

Soient $(\vec{u}; \vec{v})$ et $(\vec{u}'; \vec{v}')$ deux couples de vecteurs non-colinéaires et O, O' deux points de l'espace.

Les plans $P(O; \vec{u}, \vec{v})$ et $P'(O'; \vec{u}', \vec{v}')$ sont parallèles

$\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}'$ sont coplanaires

$\Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u}' = x\vec{u} + y\vec{v}$

et $\exists (x'; y') \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{v}' = x'\vec{u} + y'\vec{v}$

On se limitera ici à observer ce qui suit :

Questions : Considérons le plan $P(O; \vec{i}, \vec{j})$.

> Donner une représentation paramétrique de ce plan.

Vérifier que ce système équivaut à une seule équation, appelée équation cartésienne du plan $P(O; \vec{i}, \vec{j})$

Donner sans justification une équation cartésienne du plan $P(O; \vec{i}, \vec{k})$ et du plan $P(O; \vec{j}, \vec{k})$.

Donner de même une équation du plan parallèle au plan $P(O; \vec{i}, \vec{j})$ et passant par $A(0; 0; 5)$.

