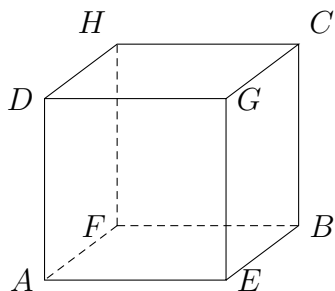


Séquence XII – Géométrie dans l'espace

Vecteurs coplanaires

Exercice XII. 1

On considère le cube ci-dessous :

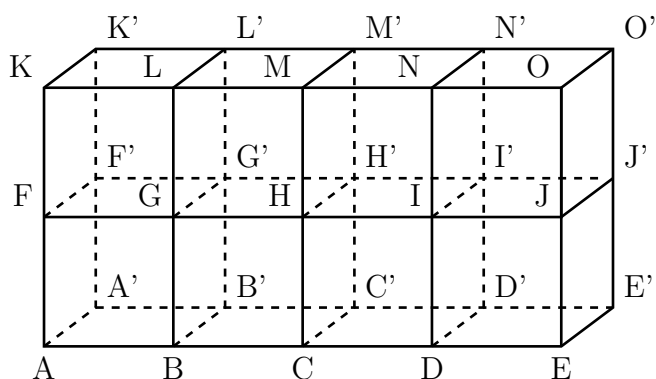


Compléter les égalités vectorielles suivantes avec des sommets du cube $AEBFDGCH$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{F\dots} \\ \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{F\dots} \\ \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} &= \overrightarrow{\dots B} \\ \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FC} &= \overrightarrow{\dots G}\end{aligned}$$

Exercice XII. 2

On considère les huit cubes accolés de la figure ci-dessous :



Compléter chacune des égalités suivantes en utilisant un point (nommé) de la figure.

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{A\dots\dots} \\ 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{C\dots\dots} \\ 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{A\dots\dots} \\ \overrightarrow{FH'} - 2\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{\dots\dots D'} \\ \overrightarrow{BI'} + \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{JO} &= \overrightarrow{A\dots\dots} \\ \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{GO} - \overrightarrow{A'A} &= \overrightarrow{\dots\dots O'}\end{aligned}$$

Exercice XII. 3

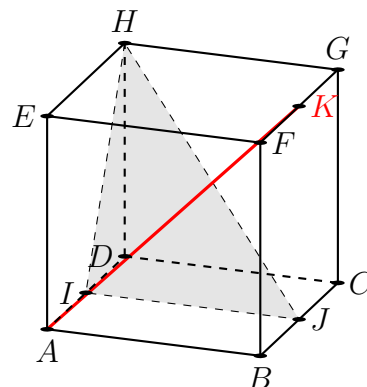
Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non-coplanaires.

- Soient $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{j} + \vec{k}$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?
- Même question avec : $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$
 $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{w} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

Exercice XII. 4

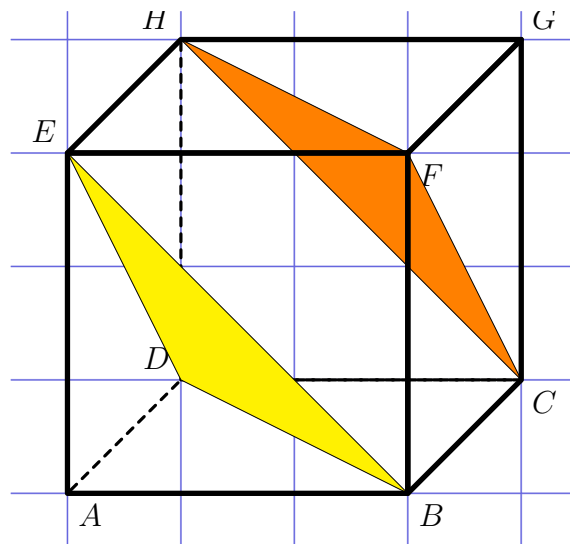
$ABCDEFGH$ est un cube, I est le milieu de $[AD]$, J est le milieu de $[BC]$ et K celui de l'arête $[FG]$.

Démontrer que la droite (AK) est parallèle au plan (IHJ) .



Exercice XII. 5

$ABCDEFGH$ est un cube. Montrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.



Séquence XII – Géométrie dans l'espace

Géométrie repérée

Exercice XII. 6

Pour chacune des figures suivantes, lire les coordonnées du point A dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et les coordonnées du vecteur $\vec{u}$. Examiner ensuite si les points B, C et D définis par leurs coordonnées sont des points de la droite $d(A; \vec{u})$.

Figure 1 : $B(3; 1; 6)$, $C(-1; 0; 3)$ et $D(7; -1; 12)$

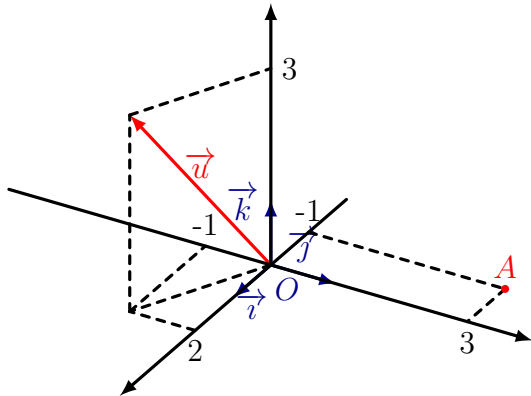
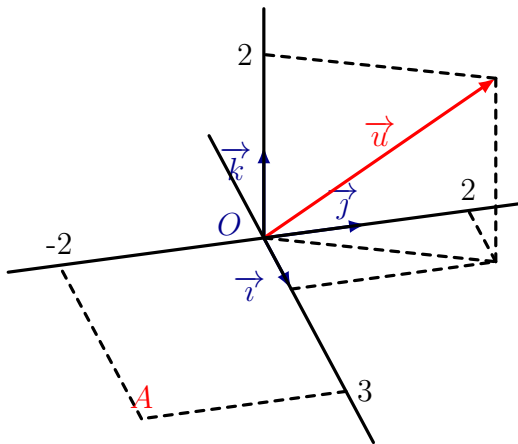
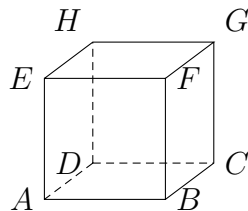


Figure 2 : $B(5; 2; 4)$, $C(6; 4; 6)$ et $D(0; -8; -8)$.



Exercice XII. 7

Soit $ABCDEFGH$ le cube ci-contre :

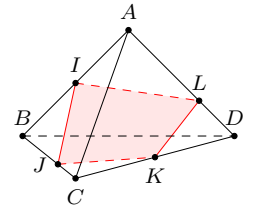


- Expliquer pourquoi $(G; \vec{GC}, \vec{GF}, \vec{GH})$ est un repère orthonormé de l'espace.
- Dans ce repère, donner les coordonnées des sommets de ce cube, celles du vecteur $\vec{GA}$ et celles du point M tel que : $\vec{GM} = \frac{2}{3}\vec{GA}$.

Exercice XII. 8

$ABCD$ est un tétraèdre.

Les points I et K sont les milieux des segments $[AB]$ et $[CD]$, J et L sont les points tels que $\vec{BJ} = \frac{2}{3}\vec{BC}$ et $\vec{AL} = \frac{2}{3}\vec{AD}$.



- Déterminer les coordonnées de I, J, K et L dans le repère $(B; \vec{BC}, \vec{BD}, \vec{BA})$.
- Montrer que ces quatre points sont coplanaires.

Exercice XII. 9

Soit un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Soit $A(1; -2; 1)$, $B(3; -1; 0)$, $C(2; 1; -2)$ et $D(0; 0; -1)$. Placer ces quatre points dans le repère. Forment-ils les sommets d'un parallélogramme ?
- Soit $D(1; 0; 2)$, $E(2; 1; \frac{3}{2})$ et $F(3; 2; 1)$. Ces points sont-ils alignés ?
- Soit $D(1; 0; 2)$, $E(2; 1; \frac{3}{2})$, $F(-1; 3; 2)$ et $G(-1; -7; 4)$. Ces points sont-ils coplanaires ?
- Soit $\vec{u}(\frac{0}{-7})$, $\vec{v}(\frac{1}{2})$, $\vec{w}(\frac{2}{-3})$, $A(-5; 2; 0)$ et $B(2; -1; 3)$. La droite $d(A; \vec{u})$ est-elle parallèle au plan $P(B; \vec{v}, \vec{w})$?
- Soit $\vec{u}(\frac{-1}{2})$, $\vec{v}(\frac{4}{-1})$, $\vec{u}(\frac{13}{-3})$, $\vec{v}(\frac{5}{-2})$, $A(-5; 2; 0)$ et $B(2; -1; 3)$. Les plans $P(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $P(B; \vec{u}, \vec{v})$ sont-ils parallèles ?

Exercice XII. 10

Dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal, soit $A(0; -1; 7)$, $B(3; -4; 7)$, $C(3; -1; 4)$, et $D(1; -3; 5)$.

- Placer ces points. Montrer que ABD , ADC et CDB sont des triangles rectangles isocèles.
- Trouver quatre points formant avec A, B, C et D les sommets d'un cube.

Séquence XII – Géométrie dans l'espace

Représentations paramétriques

Exercice XII. 11

L'espace étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Donner une représentation paramétrique...

- de la droite (AB) où $A(2; 1; 3)$ et $B(-1; 0; 4)$.
- de la droite parallèle à la droite (AB) de la question a) passant par $C(2; 5; -2)$.

Exercice XII. 12

L'espace étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère $A(1; 3; 2)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- Donner une représentation paramétrique de la droite $d(A; \vec{u})$.
- Les points $B(4; -9; 8)$, $C(-1; 10; -2)$ et $F\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$ sont-ils des points de la droite $d(A; \vec{u})$?
- La droite $d(A; \vec{u})$ admet-elle un point de cote $\sqrt{2}$?

Exercice XII. 13

L'espace étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, donner la nature et les éléments caractéristiques des l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace définis par :

- Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} x = 7 - 3k \\ y = 2 + k \\ z = k - 1 \end{cases}$$
- Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} x = -2 + k \\ y = 3 \\ z = 4k \end{cases}$$

Exercice XII. 14

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer la position relative des droites (d) et (d') dont on donne des représentations paramétriques.

Dans le cas où les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles, étudier si les elles sont perpendiculaires.

- $(d) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = t \end{cases}$ et $(d') : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$
- $(d) : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ et $(d') : \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -6 - t \end{cases}$
- $(d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = 5 + 6t \end{cases}$ et $(d') : \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -1 + 6t \\ z = 11 - 9t \end{cases}$
- $(d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = 5 + 6t \end{cases}$ et $(d') : \begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = 7 + 15t \\ z = -3 - 12t \end{cases}$
- $(d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = t \end{cases}$ et $(d') : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$

Exercice XII. 15

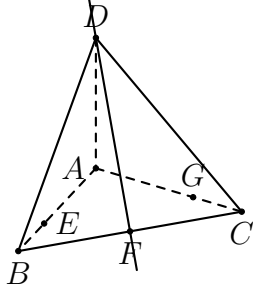
L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, donner une représentation paramétrique du plan (ABC) où $A(-1; 2; 3)$, $B(-3; 0; 4)$ et $C(5; -2; 1)$.

Séquence XII – Géométrie dans l'espace

Exercices de synthèse

Exercice XII. 16

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC , ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A .



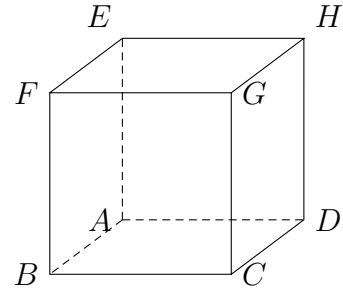
On désigne par E , F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de l'espace.

- On désigne par P le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF) . On note H le point d'intersection du plan P et de la droite (DF) .
 - Donner les coordonnées des points D et F .
 - Donner une représentation paramétrique de la droite (DF) .
 - Déterminer une équation cartésienne du plan P .
 - Calculer les coordonnées du point H .
 - Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.
- On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$ avec $\alpha \in [0; \pi]$. Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.
 - Démontrer que $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.
 - Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M .
En déduire que $ME \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
 - Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.
 - Conclure.

Exercice XII. 17

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous d'arête de longueur 1.



On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On considère les points $I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$, $J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$ et $L\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ) .
- On admet que (KL) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}u \\ y = u \\ z = 1 - u \end{cases} ; u \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes.

Partie B

- Justifier que les points I , J et K déterminent un plan.
- Le point $R\left(1; 1; -\frac{6}{5}\right)$ appartient-il à ce plan?

Partie C

- Montrer que le point L appartient à la droite (CD) .
- Démontrer que le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme.