

# Géométrie dans l'espace

## 1. Positions relatives de droites et de plans

### A. Axiomes et définitions

Dans ce chapitre, les raisonnements sont fondés sur quelques règles admises, appelées **axiomes**.

#### ■ AXIOME :

Par deux points  $A$  et  $B$  distincts de l'espace, il passe une droite et une seule que l'on peut noter  $(AB)$ .

#### ■ AXIOME :

Par trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  non alignés de l'espace, il passe un unique plan que l'on peut noter  $(ABC)$ .

#### ■ AXIOME :

Si un plan  $(P)$  contient deux points distincts  $A$  et  $B$ , alors il contient toute la droite  $(AB)$ .

#### ■ AXIOME :

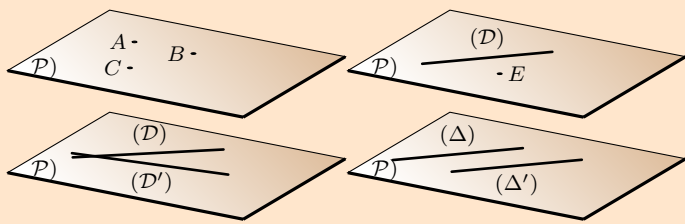
Dans tout plan de l'espace s'appliquent les théorèmes de géométrie plane. En particulier : les théorèmes de Pythagore et de Thalès.

#### ■ COROLLAIRE :

Une droite  $(d)$  et un point  $E$  tel que  $E \notin (d)$  définissent un unique plan.

Deux droites sécantes  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{D}')$  définissent un unique plan.

Deux droites strictement parallèles  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  définissent un unique plan.



#### ■ DÉFINITION :

Des points sont dits **coplanaires** s'ils appartiennent à un même plan.

#### ■ DÉFINITION :

Des droites sont dites **coplanaires** si elles sont contenues (incluses) dans un même plan.

**Remarque :** Trois points sont toujours coplanaires.

**Remarque :** Deux droites sécantes sont toujours coplanaires, ainsi que deux droites parallèles.

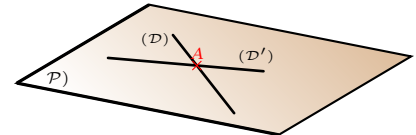
## B. Positions relatives de deux droites de l'espace

### ■ PROPRIÉTÉ :

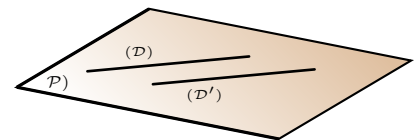
Deux droites  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{D}')$  de l'espace sont soit coplanaires soit non-coplanaires.

- Si elles sont coplanaires, alors elles sont soit sécantes en un point  $A$ , soit elles sont parallèles.
- Si elles sont parallèles, alors elles sont soit strictement parallèles soit confondues.

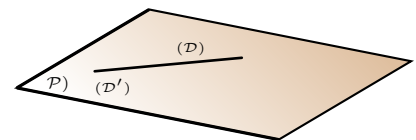
- Droites coplanaires sécantes :  $(\mathcal{D}) \cap (\mathcal{D}') = \{A\}$



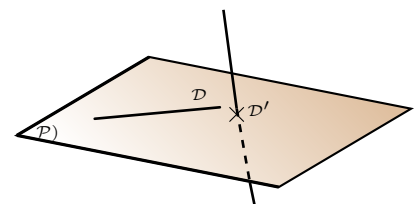
- Droites coplanaires parallèles non confondues :  $(\mathcal{D}) \cap (\mathcal{D}') = \emptyset$



- Droites coplanaires parallèles confondues :  $(\mathcal{D}) \cap (\mathcal{D}') = (\mathcal{D}) = (\mathcal{D}')$



- Droites non-coplanaires :  $(\mathcal{D}) \cap (\mathcal{D}') = \emptyset$



**Remarque :** Dans l'espace, deux droites n'ayant pas de point commun ne sont donc pas forcément parallèles : elles peuvent être non coplanaires.

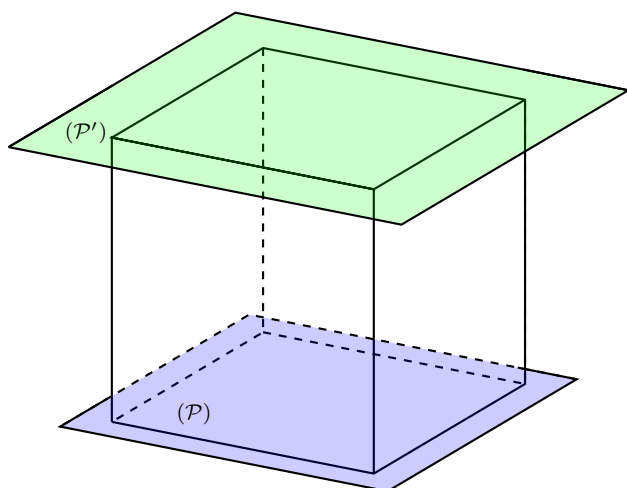
**Remarque :** Deux droites parallèles sont coplanaires, soit confondues soit sans aucun point commun.

## C. Positions relatives de deux plans

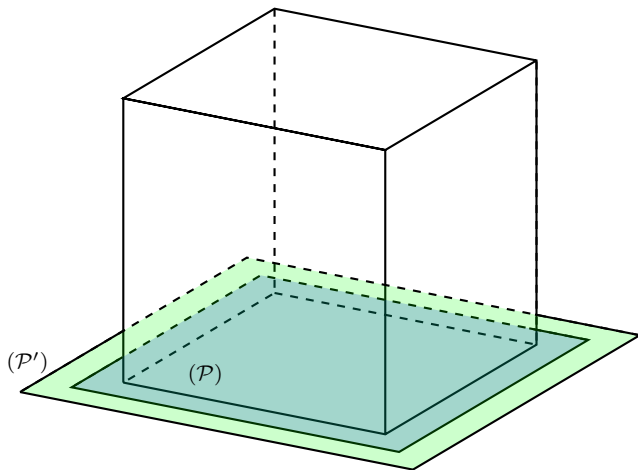
### ■ PROPRIÉTÉ :

Deux plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont soit sécants soit parallèles.

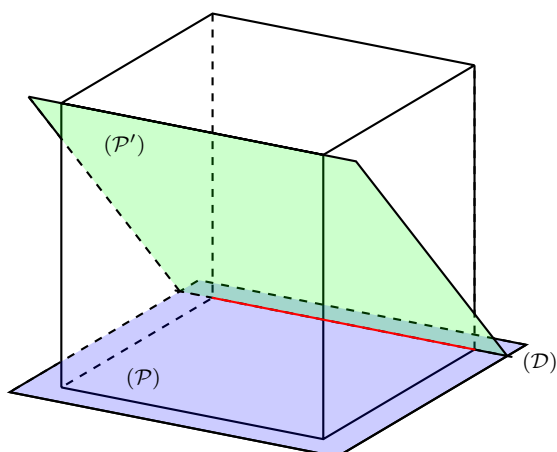
- S'ils sont sécants, ils le sont selon une droite  $(d)$ .
- S'ils sont parallèles, ils sont strictement parallèles ou confondus.
- Plans strictement parallèles :  $(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}') = \emptyset$



- Plans parallèles confondus :  $(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}') = (\mathcal{P}) = (\mathcal{P}')$



- Plans sécants :  $(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}') = (d)$

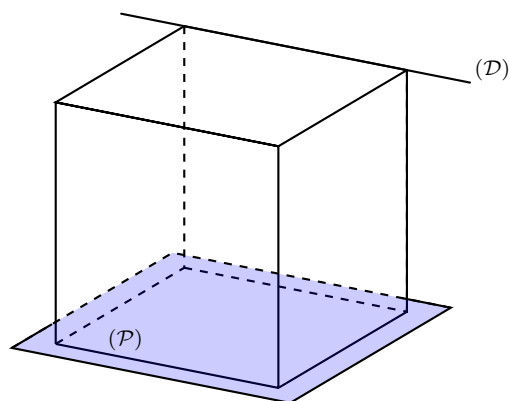


## D. Positions relatives d'une droite et d'un plan

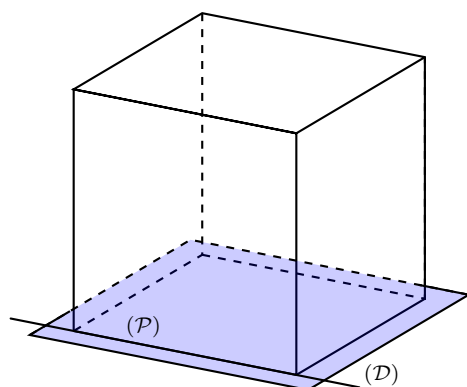
### ■ PROPRIÉTÉ :

- Une droite de l'espace et un plan sont soit sécants soit parallèles.
- Une droite est sécante à un plan s'ils ont un unique point d'intersection.
- Une droite est parallèle à un plan si elle est incluse dans ce plan ou si elle n'a aucun point commun avec ce plan.

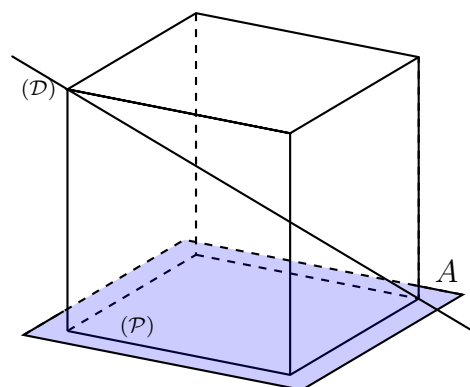
- Droite et plan strictement parallèles :  $(\mathcal{D}) \cap (\mathcal{P}) = \emptyset$



- Droite incluse dans le plan :  $(\mathcal{D}) \cap (\mathcal{P}) = (\mathcal{D})$



- Droite et plans sécants :  $(\mathcal{D}) \cap (\mathcal{P}) = \{A\}$



### Exemple :

Si une droite  $(d)$  est parallèle à une droite  $(d')$  d'un plan  $(\mathcal{P}')$ , alors  $(d)$  est-elle parallèle à  $(\mathcal{P}')$ .

## 2. Parallélisme dans l'espace

### A. Parallélisme entre droites

#### ■ PROPRIÉTÉ :

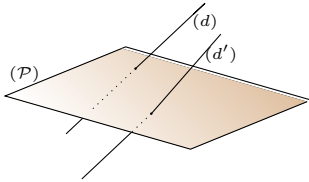
Si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.

#### ■ PROPRIÉTÉ :

Si deux droites sont parallèles, toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

#### ■ PROPRIÉTÉ :

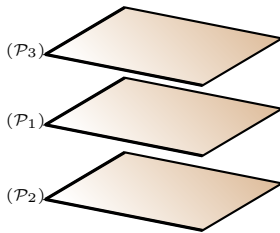
Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.



### B. Parallélisme entre plans

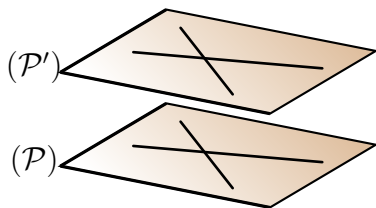
#### ■ PROPRIÉTÉ :

Si deux plans sont parallèles à un même plan, alors ils sont parallèles entre eux.



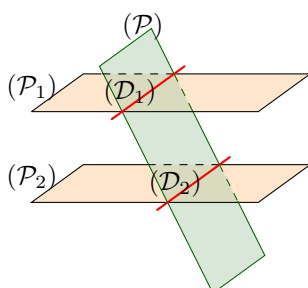
#### ■ PROPRIÉTÉ :

Deux plans sont parallèles si et seulement si pour tout couple de droites sécantes de l'un, il existe un couple de droites sécantes de l'autre qui lui est parallèle.



#### ■ PROPRIÉTÉ :

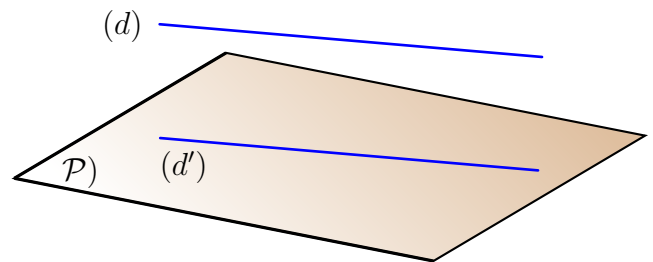
Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et leurs droites d'intersection respectives sont parallèles.



## C. Parallélisme entre droite et plan

#### ■ PROPRIÉTÉ :

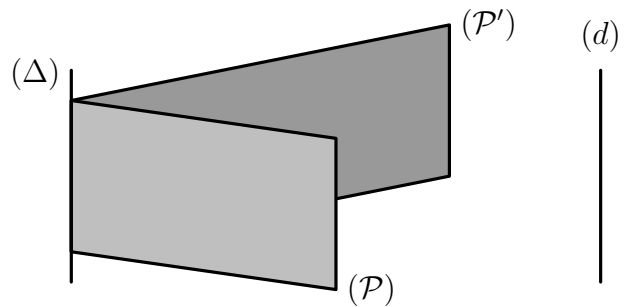
Si une droite  $(d')$  est parallèle à une droite  $(d)$  incluse dans le plan  $(P)$ , alors  $(d')$  est parallèle au plan  $(P)$ .



Si une droite  $(d)$  est parallèle à un plan  $(P')$ , tout plan  $(P)$  contenant  $(d)$  est-il parallèle à  $(P')$  ?

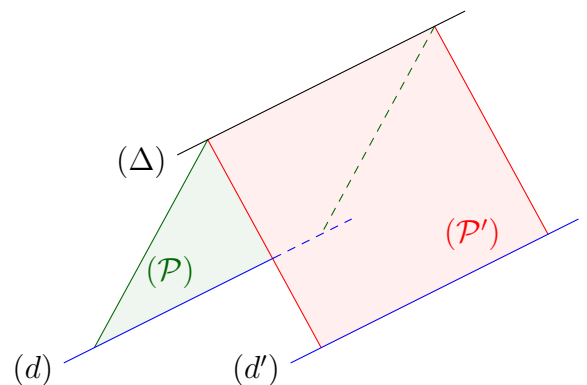
#### ■ PROPRIÉTÉ :

Si  $(P)$  et  $(P')$  sont deux plans sécants selon une droite  $(\Delta)$  et si  $(d)$  est une droite parallèle à  $(P)$  et à  $(P')$ , alors  $(d)$  est parallèle à  $(\Delta)$ .



#### ■ THÉORÈME : Théorème de toit

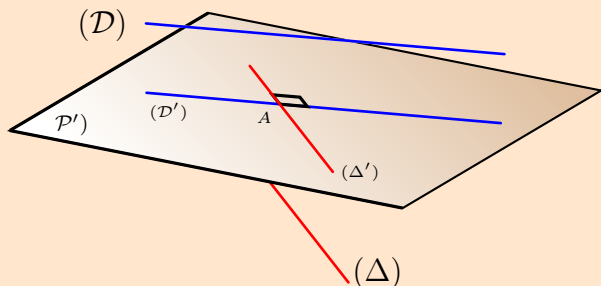
Si  $(d)$  et  $(d')$  sont deux droites parallèles, si  $(P)$  est un plan qui contient  $(d)$ , si  $(P')$  est un plan qui contient  $(d')$ , et si  $(P)$  et  $(P')$  sont sécants selon une droite  $(\Delta)$ , alors  $(\Delta)$  est parallèle à  $(d)$  et à  $(d')$ .



### 3. Orthogonalité dans l'espace

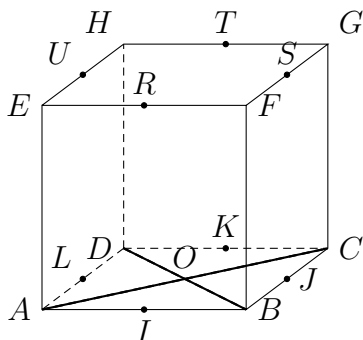
#### ■ DÉFINITION :

On dit que deux droites  $(\mathcal{D})$  et  $(\Delta)$  de l'espace sont **orthogonales** si les parallèles respectives  $(\mathcal{D}')$  et  $(\Delta')$  à ces deux droites menées par un point  $A$  quelconque sont perpendiculaires.



#### Exemple :

Dans le cube ci-dessous, les droites  $(EF)$  et  $(FG)$  sont coplanaires et perpendiculaires. Les droites  $(AB)$  et  $(FG)$  ne sont pas coplanaires mais elles possèdent des parallèles respectives qui sont perpendiculaires : par exemple  $(EF)$  et  $(FG)$ . Ainsi les droites  $(AB)$  et  $(FG)$  sont orthogonales.



Notation : On note :  $(\mathcal{D}) \perp (\Delta)$ .

#### Exemple :

Dans le cube ci-dessus, les droites  $(JU)$  et  $(GD)$  sont-elles orthogonales ?

Elles sont orthogonales.

Même question avec les droites  $(AG)$  et  $(HB)$ .

$(ABH)$  et  $(HB)$  sont orthogonales et même perpendiculaires. Ce sont les diagonales du carré  $ABGH$ .

#### Exemple :

Si deux droites sont orthogonales à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles. Vrai ou faux ?

Faux. Considérons les trois axes d'un repère orthonormé de l'espace...

#### Exemple :

Si deux droites sont orthogonales, alors toute parallèle à l'une est orthogonale à l'autre. Vrai ou faux ?

Vrai. Notons  $d$  et  $d'$  deux droites orthogonales. Ainsi, il existe  $\Delta$  et  $\Delta'$  deux droites perpendiculaires dans un même plan telles que  $\Delta // d$  et  $\Delta' // d'$ . Supposons que  $d''$  soit parallèle à  $d$ . Alors  $d'' // d$  et  $d // \Delta$ , donc  $d'' // \Delta$ . Ainsi  $d''$  est orthogonale à  $\Delta'$ ... à finir...

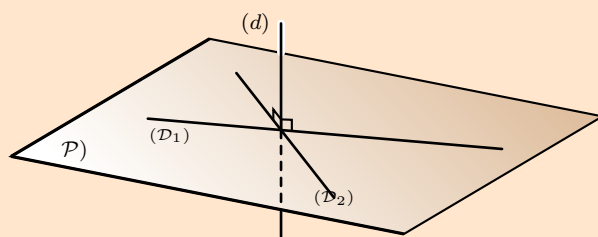
#### ■ DÉFINITION :

Une droite  $(d)$  est perpendiculaire à un plan  $(\mathcal{P})$  si elle est orthogonale à toutes les droites du plan  $(\mathcal{P})$ .

Remarque : Cette définition est en pratique impossible à vérifier, d'où l'importance du théorème suivant :

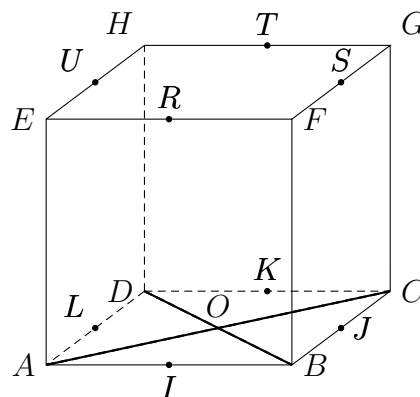
#### ■ THÉORÈME :

Une droite  $(d)$  est perpendiculaire à un plan  $(\mathcal{P})$  si et seulement si  $(d)$  est orthogonale à deux droites sécantes du plan  $(\mathcal{P})$ .



#### Exemple :

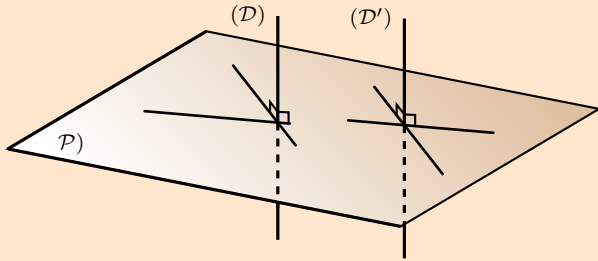
Dans le cube ci-dessus, la droite  $(EA)$  est perpendiculaire aux droites  $(AB)$  et  $(AD)$  qui sont sécantes, donc elle est perpendiculaire au plan  $(ABC)$ . Comme la droite  $(BD)$  est contenue dans le plan  $(ABC)$ , on en déduit que la droite  $(EA)$  est perpendiculaire à la droite  $(AC)$  et qu'elle est orthogonale à la droite  $(BD)$ .



On a également les propositions « évidentes » suivantes :

### ■ PROPRIÉTÉ :

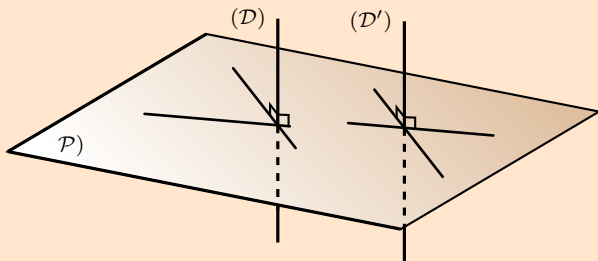
Si deux droites  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{D}')$  sont parallèles, alors tout plan  $(\mathcal{P})$  perpendiculaire à l'une l'est à l'autre.



$$\left. \begin{array}{l} (\mathcal{D}) // (\mathcal{D}') \\ (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \end{array} \right\} \Rightarrow (\mathcal{D}') \perp (\mathcal{P})$$

### ■ PROPRIÉTÉ :

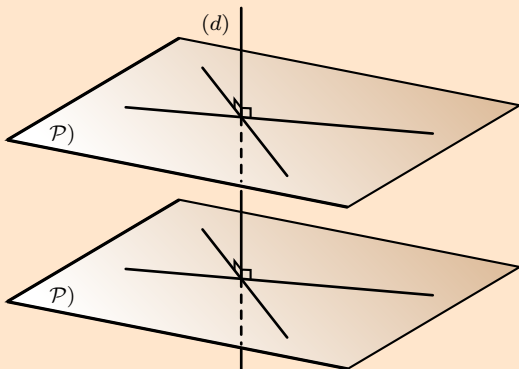
Si deux droites  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{D}')$  sont perpendiculaires à un même plan  $(\mathcal{P})$ , alors elles sont parallèles entre elles.



$$\left. \begin{array}{l} (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \\ (\mathcal{D}') \perp (\mathcal{P}) \end{array} \right\} \Rightarrow (\mathcal{D}) // (\mathcal{D}')$$

### ■ PROPRIÉTÉ :

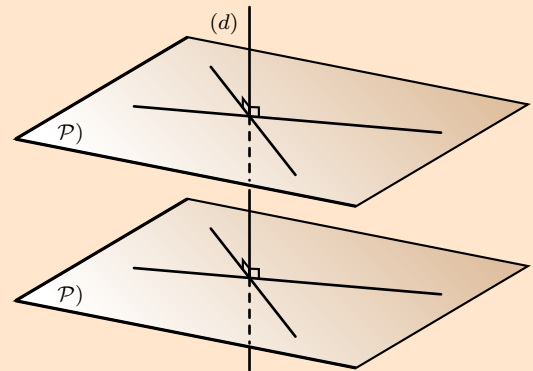
Si deux plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont perpendiculaires à une même droite  $(\mathcal{D})$ , alors ils sont parallèles.



$$\left. \begin{array}{l} (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \\ (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}') \end{array} \right\} \Rightarrow (\mathcal{P}) // (\mathcal{P}')$$

### ■ PROPRIÉTÉ :

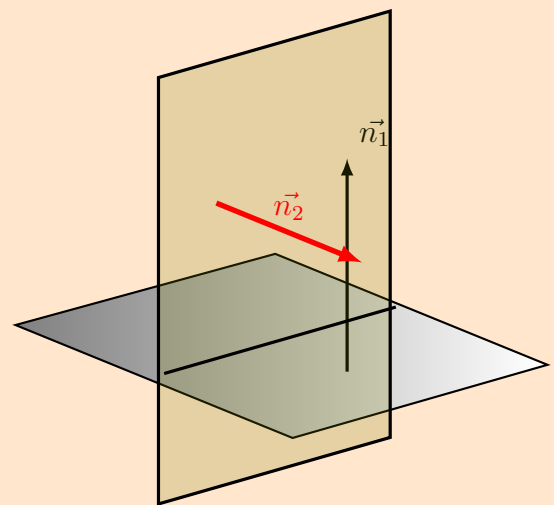
Si deux plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont parallèles, alors toute droite  $(\mathcal{D})$  perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.



$$\left. \begin{array}{l} (\mathcal{P}) // (\mathcal{P}') \\ (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \end{array} \right\} \Rightarrow (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}')$$

### ■ DÉFINITION :

Deux plans sont dits **perpendiculaires** si une droite perpendiculaire à l'un est orthogonale à une droite perpendiculaire à l'autre.



**Remarque :** Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite de l'un est-elle orthogonale à toute droite de l'autre ?

## 4. Géométrie vectorielle dans l'espace

On étend de façon naturelle la notion de vecteur du plan à **vecteur de l'espace**. En particulier :

- Pour tout point  $O$  de l'espace et tout vecteur  $\vec{u}$ , il existe un unique point  $M$  de l'espace tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ .
- $ABCD$  est un parallélogramme si et seulement si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .
- Les règles usuelles de calcul (relation de Chasles, multiplication par un réel...) sont les mêmes que dans le plan.
- Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
- Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires s'il existe un réel  $k$  tel que :  $\vec{u} = k\vec{v}$ .

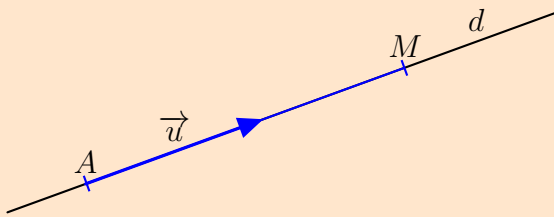
### ■ DÉFINITION :

Soient  $A$  un point et  $\vec{u}$  un vecteur non nul.

La droite passant par le point  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace vérifiant :

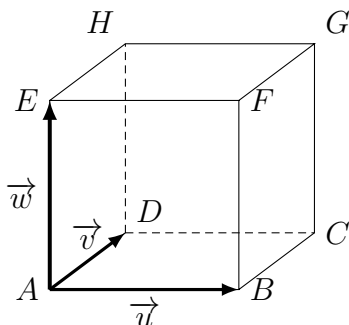
$$\exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$$

Cette droite se note  $d(A; \vec{u})$ .



### Exemple :

Dans un cube  $ABCDEFGH$ , on pose :



$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ . Identifier les droites :

$$d_1 = d(F; \vec{u} - \vec{v}) = (HF)$$

$$d_2 = d(G; \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = (AG)$$

$$d_3 = d(C; \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) = (EC)$$

$$d_4 = d(D; \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) = (FD)$$

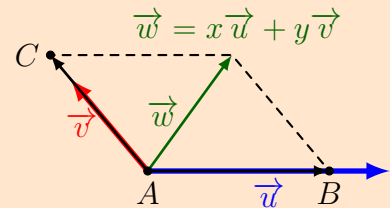
## 5. Vecteurs coplanaires et plans de l'espace

### ■ DÉFINITION :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace.

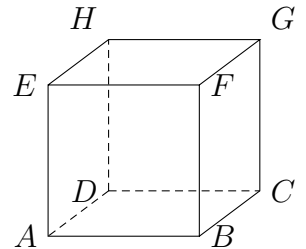
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, alors les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires.
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires : les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires s'il existe un couple  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$$



### Exemple :

On considère les points  $A, B, C, D, E, F, G$  et les  $H$  sommets du cube ci-contre.



- $\overrightarrow{EG}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont coplanaires. En effet :  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont non-colinéaires et

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$$

Donc  $\overrightarrow{EG} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AD}$ .

- Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  et  $\overrightarrow{EG}$  sont-ils coplanaires ?

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BD}$  sont coplanaires et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HG} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \end{aligned}$$

Donc les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  et  $\overrightarrow{EG}$  sont coplanaires.

- On nomme  $I$  centre de la face  $ABFE$  et  $J$  le milieu de  $[FG]$ . Les vecteurs  $\overrightarrow{EF}$ ,  $\overrightarrow{BG}$  et  $\overrightarrow{IJ}$  sont-ils coplanaires ?

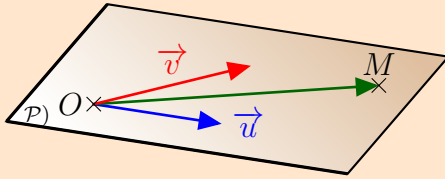
$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} \end{aligned}$$



## ■ DÉFINITION :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires et  $O$  un point de l'espace.

Le plan  $(\mathcal{P})$  passant par  $O$  et de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace vérifiant :  $\exists(x; y) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ .



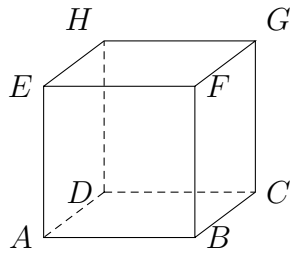
Ce plan peut se noter :  $\mathcal{P}(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

### Remarque :

- Autrement dit,  $M \in \mathcal{P}(O; \vec{u}, \vec{v})$  si et seulement si  $\overrightarrow{OM}, \vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont coplanaires.
- Si  $A, B$  et  $C$  sont trois points non alignés, alors le plan  $(ABC)$  est l'ensemble des points  $M$  vérifiant :  $\exists(x; y) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ .

### Exemple :

On considère les points  $A, B, C, D, E, F, G$  et  $H$ , sommets du cube ci-contre. Soit  $O$  le centre de la face  $ABCD$ .



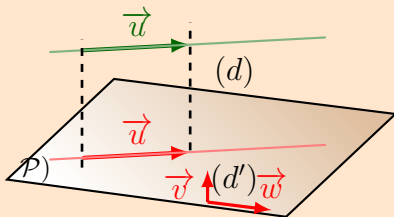
Comme

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

alors  $O \in \mathcal{P}(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  i.e.  $O \in (ABC)$ .

## ■ PROPRIÉTÉ :

Soient  $\vec{u}$  un vecteur non nul,  $(\vec{v}; \vec{w})$  un couple de vecteurs non colinéaires,  $A$  et  $O$  deux points de l'espace.



La droite  $d(A; \vec{u})$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}(O; \vec{v}, \vec{w})$  si et seulement si les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires.

Démonstration.

$\Rightarrow$  Supposons que la droite  $d(A; \vec{u})$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}(O; \vec{v}, \vec{w})$ . Alors la droite

$$(d') = d(O; \vec{u})$$

est parallèle à  $d(A; \vec{u})$  et elle est contenue dans  $\mathcal{P}(O; \vec{v}, \vec{w})$ . En effet, si elle était sécante à ce plan,  $d(A; \vec{u})$  le serait aussi, d'après la proposition 3 de la partie 2.A. .

Tout point  $M \in (d')$  vérifie donc : il existe  $\exists(x; y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\overrightarrow{OM} = x\vec{v} + y\vec{w}$  car  $M \in \mathcal{P}(O; \vec{v}, \vec{w})$  et également :  $\exists k \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{OM} = k\vec{u}$  car  $M \in (d')$ .

Ainsi, il existe trois réels  $k, x$ , et  $y$  tels que

$$k\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$$

Que  $k$  soit nul ou pas, cette égalité signifie que les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires.

$\Leftarrow$  Réciproquement : supposons que  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires.

Alors  $\exists(x; y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$ .

La droite  $(d') = d(O; \vec{u})$  est donc une droite contenue dans le plan  $\mathcal{P}(O; \vec{v}, \vec{w})$  et elle est parallèle à la droite  $d(A; \vec{u})$ .

Donc la droite  $d(A; \vec{u})$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}(O; \vec{v}, \vec{w})$  (voir remarque l'exemple de la page 2).

□

## ■ PROPRIÉTÉ :

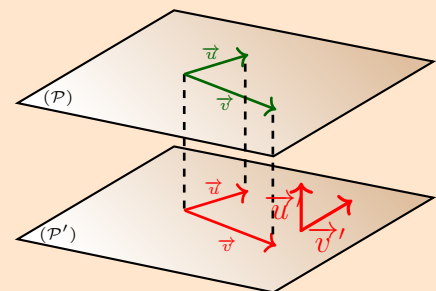
Soient  $(\vec{u}; \vec{v})$  et  $(\vec{u}'; \vec{v}')$  deux couples de vecteurs non-colinéaires et  $O$  et  $O'$  deux points de l'espace.

Les plans  $\mathcal{P}(O; \vec{u}, \vec{v})$  et  $\mathcal{P}'(O'; \vec{u}', \vec{v}')$  sont parallèles

$\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'$  et  $\vec{v}'$  sont coplanaires

$\Leftrightarrow \exists(x; y) \in \mathbb{R}^2, \vec{u}' = x\vec{u} + y\vec{v}$

et  $\exists(x'; y') \in \mathbb{R}^2, \vec{v}' = x'\vec{u} + y'\vec{v}$



Démonstration. En exercice.

□

## 6. Repérage dans l'espace

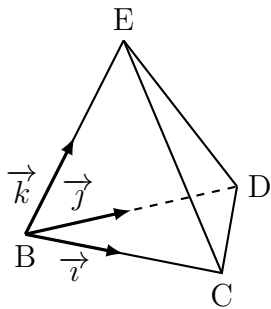
### ■ DÉFINITION :

Tout triplet  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de vecteurs non coplanaires est appelé **base des vecteurs de l'espace**.

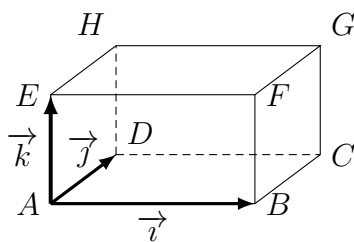
Un repère de l'espace est un quadruplet  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  où  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base et  $O$  est un point de l'espace, appelé **origine de ce repère**.

#### Exemple :

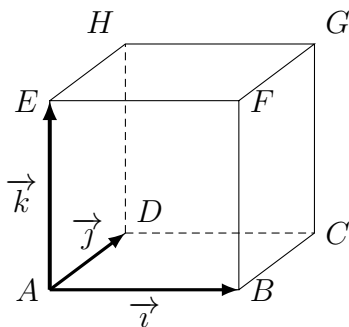
Un repère quelconque



Un repère orthogonal



Un repère orthonormé :



### ■ THÉORÈME : Existence des coordonnées

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère de l'espace.

Pour tout point  $M$  de l'espace, il existe un unique triplet  $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

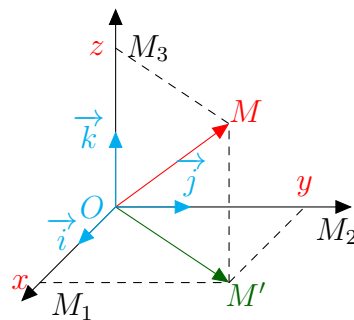
Le réel  $x$  s'appelle l'**abscisse** du point  $M$ ; le réel  $y$  s'appelle l'**ordonnée** du point  $M$ ; le réel  $z$  s'appelle la **cote** du point  $M$ .

*Démonstration.*

- Existence des coordonnées d'un point dans un repère :  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  étant un repère de l'espace, on considère un point  $M$  quelconque de l'espace. On appelle  $M'$  le point intersection du plan  $\mathcal{P}(O; \vec{i}, \vec{j})$  et de la droite  $d(M; \vec{k})$ . Notons ensuite  $M_1$  le point intersection de la droite  $d(O; \vec{i})$  avec le plan  $\mathcal{P}(M'; \vec{j}, \vec{k})$  et  $M_2$  le point intersection de la droite  $d(O; \vec{j})$  avec le

plan  $\mathcal{P}(M'; \vec{i}, \vec{k})$ . Notons enfin  $M_3$  le point intersection de la droite  $d(O; \vec{k})$  avec le plan  $\mathcal{P}(M; \vec{i}, \vec{j})$ . Alors par construction :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$$



De plus  $M_1 \in (O; \vec{i})$ , donc il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que :  $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$  et de même il existe des réels  $y$  et  $z$  tels que  $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$  et  $\overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$ .

- Unicité des coordonnées : Supposons qu'il existe un autre triplet  $(x'; y'; z') \in \mathbb{R}^3$  distinct de  $(x; y; z)$  tel que :  $\overrightarrow{OM} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ . On en déduirait alors :  $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$  ce qui entraînerait la coplanarité des vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , ce qui est exclu car  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère donc  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base.  $\square$

### ■ DÉFINITION :

On dit que le vecteur  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $(x; y; z)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  si l'unique point  $M$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$  a pour coordonnées  $(x; y; z)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### ■ PROPRIÉTÉ :

Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,

si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  alors :

Pour tout réel  $k$ ,

- $k\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$
- $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$

### ■ PROPRIÉTÉ :

Si  $M(x; y; z)$  et  $M'(x'; y'; z')$  alors :

- $\overrightarrow{MM'}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix}$
- Le milieu  $I$  de  $[MM']$  est le point

$$I \left( \frac{x + x'}{2}; \frac{y + y'}{2}; \frac{z + z'}{2} \right)$$



## 7. Orthogonalité de deux vecteurs.

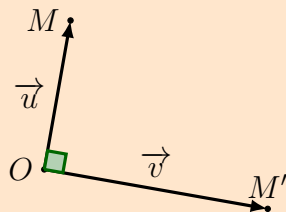
### Distance dans un repère orthonormé

On se place dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

#### ■ DÉFINITION :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs.

Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  alors les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux**.



Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls et si  $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OM'}$ , on dira que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux** si  $(OM) \perp (OM')$ .

#### ■ DÉFINITION :

Si les vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont deux à deux orthogonaux alors on dit que le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est **orthogonal**.

Si le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est orthogonal et que  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$  alors le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est dit **orthonormal** ou **orthonormé**.

#### ■ PROPRIÉTÉ :

Dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormal, si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  alors  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

*Démonstration.* Les notations ci-après sont celles de la démonstration du théorème d'existence des coordonnées, où  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est supposé orthonormal.

Si  $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , le repère étant orthogonal, le triangle  $OMM'$  est rectangle en  $M'$ , et on obtient, grâce au le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 &= \|\overrightarrow{OM}\|^2 \\ &= OM'^2 + M'M^2 \end{aligned}$$

Puis, dans le triangle  $OM_1M'$  rectangle en  $M_1$ ,  $OM'^2 = OM_1^2 + M_1M'^2$ . D'où,

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 &= \|\overrightarrow{OM}\|^2 \\ &= OM'^2 + M'M^2 \\ &= OM_1^2 + M_1M'^2 + M'M^2 \end{aligned}$$

Or :  $OM_1M'M_2$  est un parallélogramme (c'est même un rectangle) donc  $\overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{OM_2}$  et de même  $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM_3}$ .

Ainsi,  $\|\vec{u}\|^2 = \|\overrightarrow{OM}\|^2 = OM_1^2 + OM_2^2 + OM_3^2$ .

Or,  $OM_1^2 = \|\overrightarrow{OM_1}\|^2 = \|x\vec{i}\|^2 = x^2\|\vec{i}\|^2$  et de même  $OM_2^2 = y^2\|\vec{j}\|^2$  et  $OM_3^2 = z^2\|\vec{k}\|^2$ .  
Ainsi :  $\|\vec{u}\|^2 = \|\overrightarrow{OM}\|^2 = x^2\|\vec{i}\|^2 + y^2\|\vec{j}\|^2 + z^2\|\vec{k}\|^2$  et comme le repère est orthonormal,  $\|\vec{i}\|^2 = \|\vec{j}\|^2 = \|\vec{k}\|^2 = 1$  □

#### ■ COROLLAIRE :

Dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormal, si  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

#### ■ PROPRIÉTÉ :

Dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormal, si

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{u'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ , alors

$$\vec{u} \perp \vec{u'} \iff xx' + yy' + zz' = 0$$

*Démonstration.*

- Remarquons que si  $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{u'} = \overrightarrow{OM'} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$  et en supposant  $M \neq O$  et  $M' \neq O$ , on a

$\vec{u} \perp \vec{u'}$  si et seulement si  $OMM'$  est rectangle en  $O$ , c'est-à-dire, d'après le théorème de Pythagore,

$$MM'^2 = OM^2 + OM'^2$$

c'est-à-dire, en calculant les distances :

$$\begin{aligned} (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \\ = x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{aligned}$$

ou encore,

$$\begin{aligned} x'^2 - 2x'x + x^2 + y'^2 - 2y'y + y^2 + z'^2 - 2z'z + z^2 \\ = x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$-2(x'x + y'y + z'z) = 0$$

c'est-à-dire

$$xx' + yy' + zz' = 0$$

- Par ailleurs, si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{u'} = \vec{0}$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{u'}$  sont orthogonaux et on a bien

$$xx' + yy' + zz' = 0$$

□

## 8. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

### ■ PROPRIÉTÉ :

Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , soient le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  non nul. Soit  $M(x; y; z)$  un point quelconque de l'espace.

$$M(x; y; z) \in d(A; \vec{u}) \\ \iff \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$$

### ■ DÉFINITION :

Le système  $\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$  est appelé une **représentation paramétrique** de la droite  $d(A; \vec{u})$ . Le réel  $k$  s'appelle le **paramètre**.

*Démonstration.* Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , soient le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et le vecteur  $\vec{u}(a; b; c)$  non nul. Soit  $M(x; y; z)$  un point quelconque de l'espace.

$$M(x; y; z) \in d(A; \vec{u}) \\ \iff \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \\ \iff \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - x_A = ka \\ y - y_A = kb \\ z - z_A = kc \end{cases} \\ \iff \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$$

#### Exemple :

Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , soient le point  $A(-1; 2; 3)$  et le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Comme  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , on peut définir la droite  $d(A; \vec{u})$ .

Dire qu'un point  $M(x; y; z)$  est un point de  $d(A; \vec{u})$  équivaut à dire  $\exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$  ou encore, en utilisant les coordonnées, à :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x + 1 = 2k \\ y - 2 = -3k \\ z - 3 = 4k \end{cases} \\ \text{ou encore } \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = 3 + 4k \end{cases}$$

### ■ PROPRIÉTÉ :

Réciproquement, l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  vérifiant  $\exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \alpha + ka \\ y = \beta + kb \\ z = \gamma + kc \end{cases}$  où  $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{R}^3$  et  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$  s'interprète comme la droite  $d(A; \vec{u})$  où  $A(\alpha; \beta; \gamma)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

#### Exemple :

Chaque valeur réelle de  $k$  donne les coordonnées d'un point de  $d(A; \vec{u})$  : par exemple pour  $k = -1$ , on obtient le point  $B(-3; 5; -1) \in d(A; \vec{u})$ .

#### Exemple :

Réciproquement, le point  $C(5; -7; 14)$  est-il un point de  $d(A; \vec{u})$  ?

C'est le cas s'il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que :  $\begin{cases} 5 = -1 + 2k \\ -7 = 2 - 3k \\ 14 = 3 + 4k \end{cases} \text{ or, } \begin{cases} 5 = -1 + 2k \\ -7 = 2 - 3k \\ 14 = 3 + 4k \end{cases} \iff \begin{cases} k = 3 \\ k = 3 \\ k = \frac{11}{4} \end{cases}$  ce qui est faux, donc  $C \notin d(A; \vec{u})$ .

#### Exemple :

L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  vérifiant :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = k \\ y = -1 + 2k \\ z = 2 - k \end{cases} \text{ est la droite passant par}$$

$A(0; -1; 2)$  et de vecteur directeur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ car } \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} k \\ y = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} k \\ z = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} k \end{cases}$$

un point de la droite

un vecteur directeur de la droite

Observons que tout vecteur directeur colinéaire au vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  définit la même droite.

Donc par exemple  $\begin{cases} x = 3k \\ y = -1 + 6k \\ z = 2 - 3k \end{cases}$  est également une représentation paramétrique de la même droite. Observons aussi par exemple que, pour  $k = 1$ , on obtient comme point de la droite :  $B(3; 5; -1)$ .

Donc le système  $\begin{cases} x = 3 + 3k \\ y = 5 + 6k \\ z = -1 - 3k \end{cases}$  est encore une représentation paramétrique de la même droite. Une représentation paramétrique d'une droite n'est donc pas unique.

## 9. Représentation paramétrique d'un plan

### ■ PROPRIÉTÉ :

Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , soient le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  non colinéaires.

Soit  $M(x; y; z)$  un point quelconque de l'espace.

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$$

$$\iff \exists (k; k') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = x_A + ka + k'a' \\ y = y_A + kb + k'b' \\ z = z_A + kc + k'c' \end{cases}$$

*Démonstration.* Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , soient le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  non colinéaires.

Soit  $M(x; y; z)$  un point quelconque de l'espace.

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$$

$$\iff \exists (k; k') \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v}$$

$$\iff \exists (k; k') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x - x_A = ka + k'a' \\ y - y_A = kb + k'b' \\ z - z_A = kc + k'c' \end{cases}$$

$$\iff \exists (k; k') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = x_A + ka + k'a' \\ y = y_A + kb + k'b' \\ z = z_A + kc + k'c' \end{cases}$$

□

### ■ DÉFINITION :

Le système  $\begin{cases} x = x_A + ka + k'a' \\ y = y_A + kb + k'b' \\ z = z_A + kc + k'c' \end{cases}$  est appelé une **représentation paramétrique** du plan  $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$ . Les réels  $k$  et  $k'$  sont appelés les **paramètres**.

#### Exemple :

Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , soient le point  $A(2; -1; 0)$  et deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Comme les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, on peut définir le plan  $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$ .

Dire qu'un point  $M(x; y; z)$  est un point du plan  $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$  équivaut à dire :

$\exists (k; k') \in \mathbb{R}^2$  tel que :  $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v}$  ce qui équivaut, en utilisant les coordonnées, à :

$$\exists (k; k') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x - 2 = 4k - k' \\ y + 1 = -3k + 2k' \\ z - 0 = 2k + k' \end{cases}$$

ou encore :

un vecteur directeur

$$\exists (k; k') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = 2 + 4k - k' \\ y = -1 - 3k + 2k' \\ z = 2k + k' \end{cases}$$

un point de la droite

l'autre vecteur directeur

### ■ PROPRIÉTÉ :

Réciproquement, l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  vérifiant :

$$\exists (k; k') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = \alpha + ka + k'a' \\ y = \beta + kb + k'b' \\ z = \gamma + kc + k'c' \end{cases}$$

s'interprète comme le plan  $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$  où  $A(\alpha; \beta; \gamma)$ ,  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ .

#### Exemple :

Tout couple de réels  $(k; k')$  fournit les coordonnées d'un point de  $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$ .

Par exemple, le couple  $(-3; 5)$  définit le point  $B(-15; 18; -1)$ .

#### Exemple :

Le point  $C(-1; 0; -3)$  est-il un point du plan  $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$  ?

$$C(-1; 0; -3) \in \mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$$

$$\iff \exists (k; k') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} -1 = 2 + 4k - k' \\ 0 = -1 - 3k + 2k' \\ -3 = 2k + k' \end{cases}$$

$$\iff \exists (k; k') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 4k - k' = -3 \\ -3k + 2k' = 1 \\ 2k + k' = -3 \end{cases}$$

$$\iff \exists (k; k') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} k = -1 \\ k' = -1 \\ -3 = -3 \end{cases}$$

Ainsi, le point  $C(-1; 0; -3)$  est un point du plan  $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$ .

**Remarque :** Contrairement au cas des droites de l'espace, il existe un autre type d'équations de plans, que l'on verra en Terminale.