Séquence XI – Arithmétique (1/3)
Diviseurs et nombres premiers

Exercice 1

Montrer que la différence des carrés de deux entiers consécutifs est un nombre impair.

Solution de l'exercice 1

Soient n et $n+1$ deux entiers consécutifs. Nous devons montrer que $(n+1)^2 - n^2$ est impair.

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - n^2 &= n^2 + 2n + 1 - n^2 \\ &= 2n + 1\end{aligned}$$

Or, un nombre de la forme $2n+1$ est impair. Ainsi, la différence des carrés de deux entiers consécutifs est un nombre impair.

Exercice 2

Montrer que la différence des carrés de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 8.

Solution de l'exercice 2

Soit n un nombre entier impair. Ainsi, il existe un entier k tel que $n = 2k+1$. L'entier impair qui le suit est $n+2 = 2k+3$. Nous devons montrer que $(n+2)^2 - n^2$ est un multiple de 8.

$$\begin{aligned}(n+2)^2 - n^2 &= (2k+3)^2 - (2k+1)^2 \\ &= (4k^2 + 12k + 9) - (4k^2 + 4k + 1) \\ &= 4k^2 + 12k + 9 - 4k^2 - 4k - 1 \\ &= 8k + 8 \\ &= 8(k+1)\end{aligned}$$

Comme k est un entier, $k+1$ est également un entier, donc $(2k+3)^2 - (2k+1)^2$ est bien un multiple de 8, ce qui montre que la différence des carrés de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 8.

Exercice 3

Évariste affirme que pour tout entier n positif, le nombre

$$a = 2^n \times 3^n \times 7^n + 2^n \times 21^n \times 5 + 6^n \times 7^n \times 4$$

est divisible par 10. A-t-il raison ?

Solution de l'exercice 3

Décomposons l'expression de a en facteurs :

$$\begin{aligned}a &= 2^n \times 3^n \times 7^n + 2^n \times 21^n \times 5 + 6^n \times 7^n \times 4 \\ &= 2^n \times 3^n \times 7^n + 2^n \times 3^n \times 7^n \times 5 + 2^n \times 3^n \times 7^n \times 4 \\ &= 2^n \times 3^n \times 7^n \times (1 + 5 + 4) \\ &= 42^n \times 10\end{aligned}$$

Puisque $42^n \in \mathbb{Z}$, a est effectivement divisible par 10 pour tout entier positif n. Évariste a donc raison.

Exercice 4

Soient a, b et d trois entiers. Montrer que si d divise a et d divise b, alors d divise $a+b$ et $a-b$.

Solution de l'exercice 4

Supposons que d divise a et b. Cela signifie qu'il existe des entiers k et ℓ tels que $a = kd$ et $b = \ell d$.

- Pour $a+b$, on a $a + b = kd + \ell d = (k+\ell)d$. Puisque $k+\ell$ est un entier, d divise $a+b$.
- Pour $a-b$, on a $a - b = kd - \ell d = (k-\ell)d$. Puisque $k-\ell$ est un entier, d divise $a-b$.

Ainsi, si d divise a et b, alors d divise $a+b$ et $a-b$.

Exercice 5

Soient a, b et c trois entiers. Montrer que si a divise b et b divise c, alors a divise c.

Solution de l'exercice 5

Supposons que a divise b et b divise c. Cela signifie qu'il existe des entiers k et ℓ tels que $b = ka$ et $c = \ell b$.
Puisque $b = ka$, nous pouvons substituer cette expression dans celle de c. Alors $c = \ell b = \ell(ka) = (\ell k)a$.
Puisque ℓk est un entier, a divise c. Ainsi, si a divise b et b divise c, alors a divise c.

Exercice 6

Soient a et b deux entiers. Montrer que si a divise b, alors a^2 divise b^2.

Solution de l'exercice 6

Supposons que a divise b. Cela signifie qu'il existe un entier k tel que $b = ka$.
Alors, $b^2 = (ka)^2 = k^2a^2$.
Comme k^2 est un entier, cela montre que a^2 divise b^2.
Ainsi, si a divise b, alors a^2 divise b^2.

Exercice 7

Soit un entier $n \geqslant 3$. On pose $a = n^2 - 2n - 3$. Existe-t-il des valeurs de n telles que a soit premier ?

Solution de l'exercice 7

Factorisons a.

$$\begin{aligned} a &= n^2 - 2n - 3 \\ &= (n+1)(n-3) \end{aligned}$$

- Si $n = 3$, alors $a = (3+1)(3-3) = 4 \times 0 = 0$, qui n'est pas premier.
- Si $n = 4$, alors $a = (4+1)(4-3) = 5 \times 1 = 5$, qui est premier.
- Si $n \geqslant 5$, alors $n + 1 > 1$ et $n - 3 > 1$. Donc $a = (n+1)(n-3)$ est un produit de deux entiers strictement supérieurs à 1. Par conséquent, a n'est pas premier.

Conclusion : Il existe une unique valeur de n telle que a est premier, et cette valeur est $n = 4$.

Exercice 8

1. Montrer que tout nombre premier p strictement supérieur à 5 est de la forme $6k + 1$ ou $6k + 5$, avec k entier naturel.
2. Montrer que si, de plus, $p + 2$ est premier, alors p n'est que de l'une des deux formes ci-dessus.
3. Montrer qu'il n'est pas possible que les entiers p, $p + 2$ et $p + 4$ soient premiers simultanément.

Solution de l'exercice 8

1. Montrons que tout nombre premier p strictement supérieur à 5 est de la forme $6k + 1$ ou $6k + 5$ avec $k \in \mathbb{N}$.

   Tout entier p peut s'écrire sous l'une des six formes suivantes :

   $$\begin{aligned} p &= 6k, \\ p &= 6k + 1, \\ p &= 6k + 2, \\ p &= 6k + 3, \\ p &= 6k + 4, \\ p &= 6k + 5, \end{aligned}$$

   avec $k \in \mathbb{N}$.

   Examinons chacune de ces formes :

   — $p = 6k$: divisible par 6, donc p non premier.

   — $p = 6k + 2 = 2(3k + 1)$: divisible par 2 et strictement supérieur à 5, donc p non premier.

   — $p = 6k + 3 = 3(2k + 1)$: divisible par 3 et strictement supérieur à 5, donc p non premier.

   — $p = 6k + 4 = 2(3k + 2)$: divisible par 2 et strictement supérieur à 5, donc p non premier.

   Il reste donc uniquement les formes $6k + 1$ et $6k + 5$. Ainsi,

   $$p > 5 \Rightarrow p = 6k + 1 \text{ ou } p = 6k + 5.$$

2. Supposons maintenant que p et $p+2$ soient premiers, avec $p > 5$.

   D'après la question précédente, p est de la forme $6k + 1$ ou $6k + 5$.

   — Si $p = 6k + 1$, alors

   $$p + 2 = 6k + 3.$$

   D'après la question précédente, $p + 2$ n'est pas premier.

   — Donc, la seule forme possible pour que p et $p+2$ soient tous deux premiers est :

   $$p = 6k + 5.$$

3. Supposons que p, $p + 2$ et $p + 4$ soient premiers avec $p > 5$. Puisque p et $p + 2$ sont premiers, alors p est de la forme $6k + 5$, avec $k \in \mathbb{N}$.

   Alors d'après ce qui précède, $p = 6k + 5$. Donc :

   $$\begin{aligned} p + 4 &= 6k + 9 \\ &= 6\,(k + 1) + 3 \end{aligned}$$

   Donc $p + 4$ n'est pas premier d'après la question 1.

   Ainsi, il est impossible que p, $p + 2$ et $p + 4$ soient premiers simultanément.

Exercice 9

Montrer que la somme de trois entiers positifs impairs consécutifs n'est jamais un nombre premier.

Solution de l'exercice 9

Montrons que la somme de trois entiers positifs impairs consécutifs n'est jamais un nombre premier.

Soient trois entiers positifs impairs consécutifs. On peut les écrire sous la forme $2n + 1$, $2n + 3$ et $2n + 5$ avec n entier naturel.
Calculons leur somme :

$$\begin{aligned} (2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) &= 6n + 9 \\ &= 3(2n + 3) \end{aligned}$$

On constate que cette somme est divisible par 3.

Pour que cette somme soit un nombre premier, il faudrait qu'elle soit égale à 3.
Or, $n \in \mathbb{N}$, donc $6n + 9 \geqslant 9$, et donc $6n + 9$ n'est jamais égal à 3.

Donc, la somme de trois entiers positifs impairs consécutifs est toujours un multiple de 3 supérieur à 3, et ne peut jamais être un nombre premier.

Exercice 10

: Identité de Sophie Germain

1. Développer $\left(a^2+2b^2\right)^2$.
2. Déterminer les entiers strictement positifs a et b tels que a^4+4b^4 est un nombre premier.

Solution de l'exercice 10

Notons $S = a^4+4b^4$.

1. Développons $\left(a^2+2b^2\right)^2$:

$$\begin{aligned}\left(a^2+2b^2\right)^2 &= \left(a^2\right)^2 + 2\times a^2\times 2b^2 + \left(2b^2\right)^2\\ &= a^4+4a^2b^2+4b^4\end{aligned}$$

2. Déterminons les entiers strictement positifs a et b tels que a^4+4b^4 est un nombre premier.
Remarquons que :

$$a^4+4b^4 = \left(a^2+2b^2\right)^2 - 4a^2b^2$$

C'est une identité remarquable de type $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$, avec :

$$A = a^2+2b^2, \quad B = 2ab$$

Donc :

$$\begin{aligned}a^4+4b^4 &= \left(a^2+2b^2\right)^2 - (2ab)^2\\ &= \left(a^2+2b^2-2ab\right)\left(a^2+2b^2+2ab\right)\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$a^4+4b^4 = \left((a-b)^2+b^2\right)\left((a+b)^2+b^2\right)$$

On a donc exprimé $S=a^4+4b^4$ comme un produit de deux entiers positifs. Si $b\geqslant 2$, alors aucun des deux termes n'est égal à 1 (ils sont tous les deux strictement supérieurs à 1). Étudions le cas où $b=1$:
On a alors

$$a^4+4b^4 = \left((a-1)^2+1\right)\left((a+1)^2+1\right)$$

Or, comme $a\in\mathbb{N}^*$, $(a+1)^2+1>1$. Donc la seule possibilité pour que le produit soit premier est que $(a-1)^2+1=1$, i.e. $(a-1)^2=0$, i.e. $a=1$.

Réciproquement, si $a=1$ et $b=1$, alors

$$\begin{aligned}S &= 1^4+4\times 1^4\\ &= 1+4\\ &= 5\end{aligned}$$

qui est bien un nombre premier.
Conclusion : Le seul couple $(a,b)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$ tel que a^4+4b^4 est premier est :

$$\boxed{(a\,;\,b)=(1\,;\,1)}$$

Exercice 11

En étudiant les restes des divisions euclidiennes par 3, déterminer les nombres premiers p tels que 2^p+p^2 est premier.

Solution de l'exercice 11

Si on étudie les restes de la divisions euclidienne par 3,

- Si $p=2$, alors $2^2+2^2=8$ qui n'est pas premier.
- Si $p=3k$, alors $p=3$, et donc $2^3+3^2=8+9=17$, qui est premier.
- Alors $p\geqslant 5$. S'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $p=3k+1$ Alors

$$\begin{aligned}p^2 &= (3k+1)^2\\ &= 9k^2+6k+1\\ &= 1+3\left(2k+3k^2\right)\\ &= 1+3k'\end{aligned}$$

Si $p=2+3k$, alors

$$\begin{aligned}p^2 &= 4+12k+9k^2\\ &= 1+3\left(1+4k+3k^2\right)\\ &= 1+3k'\end{aligned}$$

Ainsi $p^2=1+k'$ globalement, avec $k'\in\mathbb{Z}$.

Étudions maintenant le reste dans la division euclidienne par 3 de 2^p :

On rappelle que p est impair, et :

- $2^5 = 32 = 2+3\times 10$,
- $2^7 = 4\left(2+3\times 10\right) = 8+3\times 40 = 2+3\times 42$.

Donc on conjecture que, quel que soit p impair supérieur ou égal à 5, $2^p=2+3k''$ avec $k''\in\mathbb{Z}$. Montrons cette propriété par récurrence sur p.

- L'initialisation est faite ci-dessus.
- Supposons que pour un certain entier impair p, il existe un entier $k''\in\mathbb{Z}$ tel que $2^p=2+3k''$. Alors

$$\begin{aligned}2^{p+2} &= 2^2\times 2^p\\ &= 2^2\left(2+3k''\right)\\ &= 4\left(2+3k''\right)\\ &= 8+12k''\\ &= 6+12k''+2\\ &= 3\left(2+4k''\right)+2\end{aligned}$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a montré que, quel que soit p impair supérieur à 5, il existe un entier $k'' \in \mathbb{Z}$ tel que $2^p = 3k'' + 2$.

Donc, dans notre contexte, pour p premier supérieur ou égal à 5, $2^p = 2 + 3k''$, avec $k'' \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\begin{aligned} 2^p + p^2 &= 2 + 3k'' + 1 + 3k' \\ &= 3 + 3k'' + 3k' \\ &= 3\left(1 + k'' + k'\right) \end{aligned}$$

qui est un multiple de 3 strictement plus grand que 3, donc n'est pas premier.

Donc $p = 3$ est la seule solution.

Exercice 12

Soit n un nombre premier. Déterminer dans quel(s) cas l'entier $n^2 + 1$ est premier.

Solution de l'exercice 12

- Pour $n = 2$, on a $n^2 + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$. Or 5 est premier. Donc $n = 2$ est solution.
- Considérons n premier supérieur ou égal à 3. Dans ce cas, n est impair (car tout nombre premier strictement supérieur à 2 est impair). Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.

  Alors

$$\begin{aligned} n^2 + 1 &= (2k+1)^2 + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 2 \\ &= 2(2k^2 + 2k + 1) \end{aligned}$$

  Comme $n^2 + 1$ est divisible par 2 et strictement supérieur à 2, n^2+1 n'est pas premier pour $n \geqslant 3$.

En conclusion,

$$\boxed{n^2 + 1 \text{ est premier si et seulement si } n = 2.}$$

Exercice 13

1. Développer l'expression $(x-1)\left(x^2+x+1\right)$, où x est un réel quelconque.
2. Montrer sans calculs inutiles que le nombre entier $2^{108} - 1$ n'est pas un nombre premier.
3. Déterminer son plus petit diviseur premier.

Solution de l'exercice 13

1. Développons l'expression $(x-1)(x^2+x+1)$:

$$\begin{aligned} (x-1)(x^2+x+1) &= x(x^2+x+1) - (x^2+x+1) \\ &= x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 \\ &= x^3 - 1 \end{aligned}$$

2. On vient de montrer que $(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$. En posant $x = 2^{36}$, on obtient :

$$\begin{aligned} (2^{36}-1)(2^{72}+2^{36}+1) &= (2^{36})^3 - 1 \\ &= 2^{108} - 1 \end{aligned}$$

   Comme $2^{36} - 1$ et $2^{72} + 2^{36} + 1$ sont deux entiers strictement supérieurs à 1, on a trouvé une factorisation de $2^{108} - 1$ où les facteurs sont différents de 1. Donc $2^{108} - 1$ n'est pas premier.
3. Le plus petit diviseur premier de $2^{108} - 1$ est le plus petit diviseur premier de l'un des facteurs $2^{36} - 1$ ou $2^{72} + 2^{36} + 1$.

   Observons que

$$2^{36} - 1 = (2^{18})^2 - 1 = (2^{18} - 1)(2^{18} + 1)$$

   De même,

$$2^{18} - 1 = (2^9)^2 - 1 = (2^9 - 1)(2^9 + 1)$$

   Et

$$2^9 - 1 = (2^3)^3 - 1 = 8^3 - 1 = 512 - 1 = 511$$

   et

$$2^9 + 1 = 513$$

   Donc

$$\begin{aligned} 2^{36} - 1 &= \left(2^{18} + 1\right)\left(2^{18} - 1\right) \\ &= \left(2^{18} + 1\right)\left(2^9 + 1\right)\left(2^9 - 1\right) \\ &= \left(2^{18} + 1\right) \times 513 \times 511 \end{aligned}$$

   513 est divisible par 3, donc $2^{108} - 1$ est divisible par 3. Pour montrer que c'est le plus petit diviseur premier, on s'intéresse à la divisibilité de $2^{108} - 1$ par 2.

   Vérifions ensuite que 2^{108} est pair, et donc $2^{108} - 1$ est un nombre impair, tout comme $2^{108} + 1$. Ainsi 2 ne divise pas $2^{108} - 1$.

   Donc 3 est le plus petit diviseur premier de $2^{108} - 1$.

Exercice 14

Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 189, de 450, puis des entiers : 720 ; 63×47 ; 2309; 12 936 et $24^5 \times 38^3$.

Solution de l'exercice 14

Décomposons en produit de facteurs premiers les nombres donnés :

Pour 189 **:**

$$\begin{aligned} 189 &= 3 \times 63 \\ &= 3 \times 3 \times 21 \\ &= 3 \times 3 \times 3 \times 7 \\ &= 3^3 \times 7 \end{aligned}$$

Pour 450 **:**

$$\begin{aligned} 450 &= 2 \times 225 \\ &= 2 \times 9 \times 25 \\ &= 2 \times 3^2 \times 5^2 \end{aligned}$$

Pour 720 **:**

$$\begin{aligned} 720 &= 2^4 \times 45 \\ &= 2^4 \times 3^2 \times 5 \end{aligned}$$

Pour 63×47 **:**

$63 = 3^2 \times 7$

Vérifions si 47 est premier : il n'est divisible ni par 2, 3, 5, ni 7 (et $7^2 > 47$).

Donc 47 est premier et :

$$63 \times 47 = 3^2 \times 7 \times 47$$

Pour 2 309 **:**

En testant systématiquement les diviseurs premiers jusqu'à $\sqrt{2309} \approx 48$ et on trouve que 2 309 est premier.

Pour 12 936 **:**

$$\begin{aligned} 12\,936 &= 2^3 \times 1617 \\ &= 2^3 \times 3 \times 539 \\ &= 2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11 \end{aligned}$$

Pour $24^5 \times 38^3$ **:**

Décomposons d'abord 24 et 38 :

$$\begin{aligned} 24 &= 2^3 \times 3 \\ 38 &= 2 \times 19 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 24^5 \times 38^3 &= (2^3 \times 3)^5 \times (2 \times 19)^3 \\ &= 2^{15} \times 3^5 \times 2^3 \times 19^3 \\ &= 2^{18} \times 3^5 \times 19^3 \end{aligned}$$

Exercice 15

1. Décomposer 26 460 en produit de facteurs premiers.
2. Déterminer le plus petit entier strictement positif qui, lorsqu'il est multiplié par 26 460, donne le cube d'un nombre entier.

Solution de l'exercice 15

1. Décomposons 26 460 en produit de facteurs premiers.

$$\begin{aligned} 26\,460 &= 2 \times 13\,230 \\ &= 2 \times 2 \times 6\,615 \\ &= 2^2 \times 3 \times 2\,205 \\ &= 2^2 \times 3 \times 3 \times 735 \\ &= 2^2 \times 3^2 \times 3 \times 245 \\ &= 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 49 \\ &= 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7^2 \end{aligned}$$

   Donc $26\,460 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7^2$

2. On veut trouver le plus petit entier positif n tel que $26\,460 \times n$ soit un cube parfait.

   Pour que $26\,460 \times n = a^3$ avec a entier, il faut que tous les exposants de la décomposition en facteurs premiers soient des multiples de 3.

   On a $26\,460 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7^2$

   Pour 2^2 : Il faut compléter avec 2^1 pour avoir 2^3
   Pour 3^3 : On a déjà 3^3, donc pas besoin de compléter
   Pour 5^1 : Il faut compléter avec 5^2 pour avoir 5^3
   Pour 7^2 : Il faut compléter avec 7^1 pour avoir 7^3

   Donc

$$\begin{aligned} n &= 2 \times 5^2 \times 7 \\ &= 2 \times 25 \times 7 \\ &= 350 \end{aligned}$$

   Donc le plus petit entier positif cherché est 350.

Exercice 16

Déterminer si les nombres 283 et 481 sont premiers ou non (on dit alors qu'ils sont **composés**).

Solution de l'exercice 16

— Pour 283 : d'après la calculatrice, $\sqrt{283} \approx 16,82$. Nous devons donc tester la divisibilité de 283 par les nombres premiers jusqu'à 17 exclu.

- 283 n'est pas divisible par 2
- 283 n'est pas divisible par 3
- 283 n'est pas divisible par 5
- 283 n'est pas divisible par 7
- 283 n'est pas divisible par 11
- 283 n'est pas divisible par 13

Comme 283 n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{283}$, on en déduit que 283 est un nombre premier.

— Pour 481 : d'après la calculatrice, $\sqrt{481} \approx 21,93$. Nous devons donc tester la divisibilité de 481 par les nombres premiers jusqu'à 23 exclu.

- 481 n'est pas divisible par 2
- 481 n'est pas divisible par 3
- 481 n'est pas divisible par 5
- 481 n'est pas divisible par 7
- 481 n'est pas divisible par 11
- $\frac{481}{13} = 37$, donc 481 est divisible par 13.

Ainsi 481 n'est pas un nombre premier (c'est un nombre composé).

Conclusion : 283 est un nombre premier et 481 est un nombre composé.

Exercice 17

Déterminer, en expliquant la méthode employée, le nombre premier qui suit le nombre 5 039.

Solution de l'exercice 17

On cherche le nombre premier qui suit 5 039.
Pour déterminer si un nombre n est premier, il suffit de vérifier qu'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$. Commençons par calculer $\sqrt{5039} \approx 71$ (car $71^2 = 5041$).
Nous devons donc vérifier si les nombres à partir de $5040 = 5039+1$ sont divisibles par les nombres premiers $p \leqslant 71$.
Remarquons que 5040 est pair, donc non premier. On peut éliminer tous les nombres pairs qui suivent.

Testons 5041 : $5041 = 71^2$ n'est pas premier.

Testons 5043 : $5043 = 3 \times 1681 = 3 \times 41^2$ n'est pas premier. On peut éliminer tous les multiples de 3 qui suivent.

Testons 5045 : $5045 = 5 \times 1009$ n'est pas premier. On peut éliminer tous les multiples de 5 qui suivent.

Testons 5047 :

- 5047 est-il divisible par 2 ? Non, car il est impair.
- 5047 est-il divisible par 3 ? Calculons la somme des chiffres : $5 + 0 + 4 + 7 = 16$. Comme 16 n'est pas divisible par 3, 5047 n'est pas divisible par 3.
- 5047 est-il divisible par 5 ? Non, car il ne se termine pas par 0 ou 5.
- 5047 est-il divisible par 7 ? Calculons : $\frac{5047}{7} = 721$. Donc $5047 = 7 \times 721$ n'est pas premier.

Testons 5051 :

- 5051 est-il divisible par 2 ? Non, car il est impair.
- 5051 est-il divisible par 3 ? La somme des chiffres est $5 + 0 + 5 + 1 = 11$. Comme 11 n'est pas divisible par 3, 5051 n'est pas divisible par 3.
- 5051 est-il divisible par 5 ? Non, car il ne se termine pas par 0 ou 5.
- 5051 est-il divisible par 7 ? Division : $5051 = 7 \times 721 + 4$. Donc 5051 n'est pas divisible par 7.
- 5051 est-il divisible par 11 ? On calcule alternativement $5 - 0 + 5 - 1 = 9$. Comme 9 n'est pas divisible par 11, 5051 n'est pas divisible par 11.
- 5051 est-il divisible par 13 ? $5051 = 13 \times 388 + 7$. Donc 5051 n'est pas divisible par 13.
- 5051 est-il divisible par 17 ? $5051 = 17 \times 297 + 2$. Donc 5051 n'est pas divisible par 17.
- 5051 est-il divisible par 19 ? $5051 = 19 \times 265 + 16$. Donc 5051 n'est pas divisible par 19.
- 5051 est-il divisible par 23 ? $5051 = 23 \times 219 + 14$. Donc 5051 n'est pas divisible par 23.
- 5051 est-il divisible par 29 ? $5051 = 29 \times 174 + 5$. Donc 5051 n'est pas divisible par 29.
- 5051 est-il divisible par 31 ? $5051 = 31 \times 162 + 29$. Donc 5051 n'est pas divisible par 31.
- 5051 est-il divisible par 37 ? $5051 = 37 \times 136 + 19$. Donc 5051 n'est pas divisible par 37.
- 5051 est-il divisible par 41 ? $5051 = 41 \times 123 + 8$. Donc 5051 n'est pas divisible par 41.
- 5051 est-il divisible par 43 ? $5051 = 43 \times 117 + 20$. Donc 5051 n'est pas divisible par 43.
- 5051 est-il divisible par 47 ? $5051 = 47 \times 107 + 22$. Donc 5051 n'est pas divisible par 47.
- 5051 est-il divisible par 53 ? $5051 = 53 \times 95 + 16$. Donc 5051 n'est pas divisible par 53.
- 5051 est-il divisible par 59 ? $5051 = 59 \times 85 + 36$. Donc 5051 n'est pas divisible par 59.
- 5051 est-il divisible par 61 ? $5051 = 61 \times 82 + 49$. Donc 5051 n'est pas divisible par 61.
- 5051 est-il divisible par 67 ? $5051 = 67 \times 75 + 26$. Donc 5051 n'est pas divisible par 67.
- 5051 est-il divisible par 71 ? $5051 = 71 \times 71 + 10$. Donc 5051 n'est pas divisible par 71.

Après avoir vérifié que 5051 n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{5051}$, on peut conclure que 5051 est un nombre premier.

Donc le nombre premier qui suit 5039 est 5051.

Séquence XI – Arithmétique (2/3)
Quelques exemples de décompositions

Exercice 18
Déterminer la fraction irréductible égale à

$$\frac{31\,122}{100\,947}$$

Solution de l'exercice 18
Pour trouver la fraction irréductible égale à $\frac{31\,122}{100\,947}$, il faut déterminer la décomposition en facteurs premiers du numérateur et du dénominateur, puis simplifier.

Décomposition du numérateur $31\,122$ **:**

$$\begin{aligned} 31\,122 &= 2 \times 15\,561 \\ &= 2 \times 3 \times 5\,187 \\ &= 2 \times 3 \times 3 \times 1\,729 \\ &= 2 \times 3^2 \times 7 \times 247 \\ &= 2 \times 3^2 \times 7 \times 13 \times 19 \end{aligned}$$

Décomposition du dénominateur $100\,947$ **:**

$$\begin{aligned} 100\,947 &= 3 \times 33\,649 \\ &= 3 \times 7 \times 4\,807 \\ &= 3 \times 7 \times 19 \times 253 \\ &= 3 \times 7 \times 19 \times 11 \times 23 \end{aligned}$$

Simplification de la fraction :
En regroupant les facteurs communs :

$$\begin{aligned} \frac{31\,122}{100\,947} &= \frac{2 \times 3^2 \times 7 \times 13 \times 19}{3 \times 7 \times 19 \times 11 \times 23} \\ &= \frac{2 \times 3 \times 13}{11 \times 23} \\ &= \frac{78}{253} \end{aligned}$$

Exercice 19
Déterminer, grâce à la méthode de décomposition en produit de facteurs premiers, s'il existe des valeurs de l'entier n pour que, parmi les couples suivants, l'un des nombres soit un diviseur de l'autre :

1. $p = 680$ et $q = 2550 \times 2^n$
2. $r = 22264$ et $s = 1012 \times 11^n$
3. $t = 144 \times 7^n$ et $u = 1029 \times 2^n$

Solution de l'exercice 19
Pour déterminer si l'un des nombres est diviseur de l'autre, on va décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.

— Pour $p = 680$ et $q = 2550 \times 2^n$:
Factorisation de $p = 680$:

$$\begin{aligned} 680 &= 2 \times 340 \\ &= 2 \times 2 \times 170 \\ &= 2^2 \times 170 \\ &= 2^2 \times 2 \times 85 \\ &= 2^3 \times 85 \\ &= 2^3 \times 5 \times 17 \end{aligned}$$

Donc $p = 680 = 2^3 \times 5 \times 17$
Factorisation de $q = 2\,550 \times 2^n$:

$$\begin{aligned} 2550 &= 2 \times 1275 \\ &= 2 \times 3 \times 425 \\ &= 2 \times 3 \times 5 \times 85 \\ &= 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17 \\ &= 2 \times 3 \times 5^2 \times 17 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} q = 2550 \times 2^n &= 2 \times 3 \times 5^2 \times 17 \times 2^n \\ &= 2^{n+1} \times 3 \times 5^2 \times 17 \end{aligned}$$

Pour que p divise q, il faut que tous les facteurs premiers de p apparaissent dans la décomposition de q avec un exposant supérieur ou égal. Donc :

- 2^3 doit diviser 2^{n+1}, ce qui est vrai si $n+1 \geqslant 3$, donc $n \geqslant 2$
- 5 doit diviser 5^2, ce qui est vrai
- 17 doit diviser 17, ce qui est vrai

Pour que q divise p, il faut que tous les facteurs premiers de q apparaissent dans p avec un exposant au moins aussi grand. Mais q contient le facteur 3 qui n'est pas dans p, donc q ne peut pas diviser p.
Conclusion : $\boxed{p \text{ divise } q \text{ si et seulement si } n \geqslant 2.}$

— Pour $r = 22\,264$ et $s = 1012 \times 11^n$:
Factorisation de $r = 22264$:

$$\begin{aligned} 22264 &= 8 \times 2783 \\ &= 2^3 \times 2783 \\ &= 2^3 \times 11 \times 253 \qquad = 2^3 \times 11^2 \times 23 \end{aligned}$$

Donc $r = 22\,264 = 2^3 \times 11^2 \times 23$
Factorisation de $s = 1\,012 \times 11^n$:

$$\begin{aligned} 1\,012 &= 4 \times 253 \\ &= 2^2 \times 253 \\ &= 2^2 \times 11 \times 23 \end{aligned}$$

Donc $s = 1\,012 \times 11^n = 2^2 \times \times 11^{n+1} \times 23$

Pour que r divise s, il faut que 2^3 divise 2^2, ce qui est impossible car $3 > 2$

Donc r ne peut pas diviser s.

Pour que s divise r, il faut :

- 2^2 doit diviser 2^3, ce qui est vrai
- 23 doit diviser 23, ce qui est vrai
- 11^{n+1} doit diviser 12, ce qui est vrai si $n+1 = 2$, donc si $n = 1$

Conclusion : $\boxed{s \text{ divise } r \text{ si et seulement si } n = 1.}$

— Pour $t = 144 \times 7^n$ et $u = 1\,029 \times 2^n$:
Factorisation de $t = 144 \times 7^n$:

$$\begin{aligned} 144 &= 12^2 \\ &= (2^2 \times 3)^2 \\ &= 2^4 \times 3^2 \end{aligned}$$

Donc $t = 144 \times 7^n = 2^4 \times 3^2 \times 7^n$
Factorisation de $u = 1\,029 \times 2^n$:

$$\begin{aligned} 1\,029 &= 3 \times 343 \\ &= 3 \times 7^3 \end{aligned}$$

Donc $u = 1\,029 \times 2^n = 2^n \times 3 \times 7^3$
Pour que t divise u, il faut que :

- 2^4 divise 2^n, ce qui est vrai si $n \geqslant 4$
- 3^2 divise 3, ce qui est impossible car $2 > 1$

Donc t ne peut pas diviser u.
Pour que u divise t, il faut que :

- 3 divise 3^2, ce qui est vrai
- 7^3 divise 7^n, ce qui est vrai si $n \geqslant 3$
- 2^n divise 2^4, ce qui est vrai si $n \leqslant 4$

Conclusion :

$\boxed{u \text{ divise } t \text{ si et seulement si } n = 3 \text{ ou } n = 4.}$

Exercice 20

Montrer que le nombre de diviseurs positifs d'un entier n strictement positif est impair si et seulement si n est un carré parfait.

Solution de l'exercice 20

Soit n un entier strictement positif. On rappelle tout d'abord comment calculer le nombre de diviseurs positifs d'un entier :
Si $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ est la décomposition de n en produit de facteurs premiers, alors le nombre de diviseurs de n est :

$$D(n) = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_k + 1)$$

Étudions les deux implications :

($\Longleftarrow$) Si n est un carré parfait, alors le nombre de diviseurs positifs de n est impair.

Si n est un carré parfait, alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $n = m^2$. Dans la décomposition en facteurs premiers de n, tous les exposants α_i sont pairs. Donc

$$n = p_1^{2\beta_1} \times p_2^{2\beta_2} \times \ldots \times p_k^{2\beta_k}$$

Le nombre de diviseurs est donc :

$$D(n) = (2\beta_1 + 1) \times (2\beta_2 + 1) \times \ldots \times (2\beta_k + 1)$$

Or, tous les facteurs $(2\beta_i + 1)$ sont impairs.
Le produit d'un nombre fini de nombres impairs est impair.
Donc $D(n)$ est impair.

($\Longrightarrow$) Si le nombre de diviseurs positifs de n est impair, alors n est un carré parfait.

Montrons la contraposée : si n n'est pas un carré parfait, alors le nombre de diviseurs positifs de n est pair.

Si n n'est pas un carré parfait, alors dans sa décomposition en facteurs premiers

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$$

il existe au moins un exposant α_i qui est impair.
Le nombre de diviseurs positifs est :

$$D(n) = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_k + 1)$$

Si α_i est impair, alors $\alpha_i + 1$ est pair.
Le produit d'un nombre avec un nombre pair est toujours pair.
Donc $D(n)$ est pair.

Ainsi, on a montré que le nombre de diviseurs positifs d'un entier n strictement positif est impair si et seulement si n est un carré parfait.

Exercice 21

Déterminer l'entier naturel a pour que l'entier $N = 25 \times 6^a$ ait 48 diviseurs positifs.

Solution de l'exercice 21 Commençons par décomposer N en produit de facteurs premiers :

$$\begin{aligned} N &= 25 \times 6^a \\ &= 5^2 \times (2 \times 3)^a \\ &= 5^2 \times 2^a \times 3^a \end{aligned}$$

D'après la formule du nombre de diviseurs positifs, on sait que

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$$

Alors, le nombre de diviseurs positifs de n est :

$$D(n) = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_k + 1)$$

Dans notre cas,

$$N = 2^a \times 3^a \times 5^2$$

donc le nombre de diviseurs positifs est :

$$D(N) = (a+1) \times (a+1) \times (2+1) = (a+1)^2 \times 3$$

On cherche $D(N) = 48$, donc :

$$\begin{aligned} &(a+1)^2 \times 3 = 48 \\ \text{i.e. } &(a+1)^2 = 16 \\ \text{i.e. } &a+1 = \sqrt{16} \text{ ou } a+1 = -\sqrt{16} \\ \text{i.e. } &a+1 = 4 \text{ ou } a+1 = -4 \\ \text{i.e. } &a = 3 \text{ ou } a = -5 \end{aligned}$$

Or, $a \geqslant 0$. Donc $a = 3$.

Exercice 22

1. Déterminer les écritures possibles des entiers ayant exactement quatre diviseurs.
2. Déterminer le plus petit d'entre eux.

Solution de l'exercice 22

- Cherchons les écritures possibles des entiers ayant exactement quatre diviseurs.

  Soit n un entier positif. Rappelons que si

  $$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$$

  est la décomposition de n en produit de facteurs premiers, alors le nombre de diviseurs de n est donné par la formule :

  $$D(n) = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \cdots \times (\alpha_k + 1)$$

  On cherche donc les entiers n tels que $D(n) = 4$.

  Comme 4 peux s'écrire : 4 ou encore 2×2. On a deux possibilités pour les facteurs de $D(n)$:

  — Soit $D(n) = 4 \times 1$, ce qui correspond à $\alpha_1 + 1 = 4$ et $k = 1$. Donc $n = p^3$ où p est un nombre premier.

  — Soit $D(n) = 2 \times 2$, ce qui correspond à $\alpha_1 + 1 = 2$, $\alpha_2 + 1 = 2$ et $k = 2$. Donc $n = p_1 \times p_2$ où p_1 et p_2 sont des nombres premiers distincts

- Déterminons le plus petit de ces entiers.

  Pour $n = p^3$, le plus petit nombre premier p possible est $p = 2$, ce qui donne $n = 2^3 = 8$.

  Pour $n = p_1 \times p_2$ avec $p_1 < p_2$, les plus petits nombres premiers sont $p_1 = 2$ et $p_2 = 3$, ce qui donne $n = 2 \times 3 = 6$.

  Donc le plus petit entier ayant exactement quatre diviseurs est $n = 6$.

Exercice 23

1. Déterminer l'entier naturel a pour que l'entier $n = 2^a \times 3^{2a+2}$ ait 21 diviseurs.
2. Déterminer l'entier naturel b pour que l'entier $N = 9 \times 10^b$ ait 27 diviseurs.

Solution de l'exercice 23

1. Cherchons l'entier naturel a pour que $n = 2^a \times 3^{2a+2}$ ait 21 diviseurs.

   Le nombre de diviseurs d'un entier s'obtient en ajoutant 1 à chaque exposant dans la décomposition en facteurs premiers, puis en multipliant les résultats :

   $$\begin{aligned} d(n) &= (a+1) \times ((2a+2)+1) \\ &= (a+1)(2a+3) \end{aligned}$$

   On veut $d(n) = 21$, donc :

   $$(a+1)(2a+3) = 21$$

   Développons :

   $$\begin{aligned} 2a^2 + 3a + 2a + 3 &= 21 \\ 2a^2 + 5a + 3 &= 21 \\ 2a^2 + 5a - 18 &= 0 \end{aligned}$$

   Résolvons cette équation du second degré.
   Le discriminant est :

   $$\begin{aligned} \Delta &= 5^2 - 4 \times 2 \times (-18) \\ &= 25 + 144 \\ &= 169 \\ &= 13^2 \end{aligned}$$

   Les solutions sont :

   $$a = \frac{-5+13}{2 \times 2} = \frac{8}{4} = 2$$
   $$a = \frac{-5-13}{2 \times 2} = \frac{-18}{4} = -\frac{9}{2}$$

   Comme a doit être un entier naturel, seule la solution $a = 2$ convient.
   Vérification :

   $$(2+1)(2 \times 2 + 3) = 3 \times 7 = 21.$$

   Donc l'entier naturel cherché est $a = 2$.

2. Cherchons maintenant l'entier naturel b pour que $N = 9 \times 10^b$ ait 27 diviseurs.
Décomposons N :

$$\begin{aligned} N &= 9 \times 10^b \\ &= 3^2 \times (2 \times 5)^b \\ &= 3^2 \times 2^b \times 5^b \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre de diviseurs de N est :

$$\begin{aligned} d(N) &= (2+1)(b+1)(b+1) \\ &= 3(b+1)^2 \end{aligned}$$

On veut $d(N) = 27$, donc :

$$\begin{aligned} 3(b+1)^2 &= 27 \\ (b+1)^2 &= 9 \\ b+1 &= 3 \quad (\text{car } b \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

donc

$$b = 2$$

Vérification :

$$d(N) = 3(2+1)^2 = 3 \times 9 = 27$$

Donc l'entier naturel cherché est $b = 2$.

Exercice 24

Déterminer l'entier positif n ayant cinq diviseurs positifs et tel que $n - 16$ est le produit de deux nombres premiers.

Solution de l'exercice 24 On cherche l'entier positif n ayant cinq diviseurs positifs et tel que $n - 16$ soit le produit de deux nombres premiers.
Commençons par déterminer les formes possibles d'un entier ayant exactement cinq diviseurs.
Si $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$ est la décomposition en facteurs premiers de n, alors le nombre de diviseurs de n est :

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

On cherche $d(n) = 5$. Or 5 est un nombre premier, donc la seule possibilité est :

$$d(n) = 5 \times 1$$

c'est-à-dire que n est une puissance quatrième d'un nombre premier :

$$n = p^4 \quad \text{avec } p \text{ premier.}$$

On sait que $n - 16$, c'est-à-dire $p^4 - 16$ est le produit de deux nombres premiers.
Or,

$$\begin{aligned} p^4 - 16 &= \left(p^2\right)^2 - 4^2 \\ &= \left(p^2 - 4\right)\left(p^2 + 4\right) \\ &= (p-2)(p+2)\left(p^2+4\right) \end{aligned}$$

Or, $p^4 - 16$ est le produit de deux nombres premiers, il faut donc que l'un des trois termes soit égal à 1, et ce doit être le plus petit des trois, qui est $p - 2$.
Donc $p = 3$, et donc $n = p^4 = 3^4 = 81$.
Ainsi, l'entier recherché est $n = 81$.

Exercice 25

Déterminer les entiers positifs n n'ayant pour diviseurs premiers que 2 et 3 et tels que le nombre de diviseurs positifs de n^2 est le triple de celui de n.

Solution de l'exercice 25

Écrivons n sous la forme $n = 2^a \times 3^b$, où a et b sont des entiers naturels.
Le nombre de diviseurs de n est alors donné par :

$$D(n) = (a+1)(b+1)$$

et celui de n^2 par : $D(n^2) = (2a+1)(2b+1)$

La condition imposée est $D(n^2) = 3 \times D(n)$
c'est-à-dire $(2a+1)(2b+1) = 3(a+1)(b+1)$
Développons de chaque côté :

$$4ab + 2a + 2b + 1 = 3ab + 3a + 3b + 3$$

$$4ab - 3ab + 2a - 3a + 2b - 3b + 1 - 3 = 0$$

$$ab - a - b - 2 = 0$$

ce qui peut s'écrire :

$$ab - a - b = 2$$

Ajoutons 1 dans chaque membre pour pouvoir factoriser :

$$ab - a - b + 1 = 3$$

$$(a-1)(b-1) = 3$$

Puisque a et b sont des entiers naturels, les seules paires $(a-1\,;\,b-1)$ possibles sont $(1,3)$ ou $(3,1)$.
Ainsi :

- Si $a - 1 = 1$ et $b - 1 = 3$, alors $a = 2$ et $b = 4$,
- Si $a - 1 = 3$ et $b - 1 = 1$, alors $a = 4$ et $b = 2$.

Les solutions pour n sont donc :

$$n = 2^2 \times 3^4 = 4 \times 81 = 324$$

ou

$$n = 2^4 \times 3^2 = 16 \times 9 = 144$$

Réponse : Les entiers positifs n sont 144 et 324.

Exercice 26

Soient p et q deux nombres premiers consécutifs supérieurs ou égaux à 3 tels que $p < q$.

1. Montrer que le nombre $N = \dfrac{p+q}{2}$ est un entier qui divise $p+q$ et qui vérifie $p < N < q$.
2. En déduire que la somme $p + q$ est le produit d'au moins trois nombres premiers (éventuellement égaux).

Solution de l'exercice 26

1. Comme p et q sont premiers et supérieurs ou égaux à 3, ils sont impairs (car le seul nombre premier pair est 2).
   Ainsi, on peut écrire :

$$p = 2k + 1, \quad q = 2m + 1$$

   pour des entiers naturels k et m tels que $k < m$.
   Calculons N :

$$\begin{aligned} N &= \frac{p+q}{2} \\ &= \frac{(2k+1)+(2m+1)}{2} \\ &= \frac{2(k+m+1)}{2} \\ &= k+m+1 \end{aligned}$$

   Ainsi, N est un entier.
   De plus,

$$\begin{aligned} p+q &= (2k+1)+(2m+1) \\ &= 2(k+m+1) \\ &= 2N, \end{aligned}$$

   donc N divise $p+q$.
   Vérifions maintenant que $p < N < q$.
   Calculons :

$$\begin{aligned} N-p &= \frac{p+q}{2} - p \\ &= \frac{q-p}{2}. \end{aligned}$$

   Comme $p < q$, on a $q - p > 0$, donc $N - p > 0$, ce qui montre que $p < N$.
   De même :

$$\begin{aligned} q-N &= q - \frac{p+q}{2} \\ &= \frac{q-p}{2}, \end{aligned}$$

   donc $q - N > 0$, ce qui montre que $N < q$.
   Ainsi, on a bien $p < N < q$.
2. Puisque $p + q = 2N$ et N est un entier strictement compris entre p et q, on remarque que :
   - N n'est pas premier, sinon il existerait un nombre premier entre p et q, ce qui contredirait l'hypothèse que p et q sont premiers consécutifs.
   - Donc N est un nombre composé, c'est-à-dire qu'il possède au moins deux facteurs premiers.

   Ainsi, N est le produit d'au moins deux nombres premiers, et donc $p + q = 2 \times N$ est le produit d'au moins trois nombres premiers (en comptant le facteur 2).

Conclusion : la somme $p + q$ est bien le produit d'au moins trois nombres premiers (éventuellement égaux).

Exercice 27

Écrire un algorithme effectuant la décomposition en facteurs premiers d'un entier entré par l'utilisateur.

Solution de l'exercice 27

Voici un algorithme qui effectue la décomposition en facteurs premiers d'un entier entré par l'utilisateur :

```
Fonction DecompositionFacteursPremiers(n)
  Si n = 1 Alors
    Afficher "1 = 1"
    Retourner
  FinSi

  Afficher n, " = "
  premier <- Vrai

  // Traitement des facteurs 2
  Tant que n mod 2 = 0 Faire
    Si premier = Vrai Alors
      Afficher "2"
      premier <- Faux
    Sinon
      Afficher " x 2"
    FinSi
    n <- n / 2
  FinTant que

  // Traitement des facteurs impairs
  diviseur <- 3
  Tant que diviseur <= sqrt(n) Faire
    Tant que n mod diviseur = 0 Faire
      Si premier = Vrai Alors
        Afficher diviseur
        premier <- Faux
      Sinon
      Afficher " x ", diviseur
      FinSi
    n <- n / diviseur
    FinTant que
  diviseur <- diviseur + 2
  FinTant que

  // S'il reste un facteur premier > sqrt(n)
  Si n > 1 Alors
    Si premier = Vrai Alors
      Afficher n
    Sinon
      Afficher " × ", n
    FinSi
  FinSi
FinFonction
```

Explication de l'algorithme :

1. Si l'entier est 1, on affiche "1 = 1" et on termine.
2. On commence par traiter le facteur 2 séparément (pour ne traiter ensuite que les diviseurs impairs).
3. On teste ensuite les diviseurs impairs à partir de 3, en incrémentant de 2 à chaque étape.
4. On n'a besoin de tester que les diviseurs jusqu'à la racine carrée de n, car si n a un diviseur $d > sqrt(n)$, alors n/d est aussi un diviseur de n et $n/d < \sqrt{n}$.
5. Si après avoir testé tous les diviseurs jusqu'à $\sqrt{n}$, il reste un nombre $n > 1$, alors ce nombre est nécessairement premier et fait partie de la décomposition.

Cet algorithme est efficace car :

- Il ne teste que les nombres jusqu'à la racine carrée de n.
- Il évite de tester les nombres pairs après avoir traité le facteur 2.
- Il n'a pas besoin de vérifier si chaque diviseur est premier, car on teste les diviseurs dans l'ordre croissant.

Exercice 28

Écrire un algorithme effectuant qui renvoie si un nombre n entré par l'utilisateur est premier ou non.

Solution de l'exercice 28

Voici un algorithme qui détermine si un nombre entré par l'utilisateur est premier ou non :

```
Fonction EstPremier(n)
  // Entrée : n est un entier positif
  // Sortie : Vrai si n est premier, Faux sinon

  // Cas particuliers
  Si n < 2 Alors
    Retourner Faux // 0 et 1 ne sont pas premiers
  FinSi

  Si n = 2 ou n = 3 Alors
  Retourner Vrai // 2 et 3 sont premiers
  FinSi

  // Test de divisibilité par 2
  Si n mod 2 = 0 Alors
    Retourner Faux // Les nombres pairs > 2 ne sont pas premiers
  FinSi

  // Test des diviseurs impairs jusqu'à sqrt(n)
  diviseur <- 3
  racine <- sqrt(n)

  Tant que diviseur <= racine Faire
    Si n mod diviseur = 0 Alors
      Retourner Faux // n est divisible par diviseur, donc n n'est pas premier
    FinSi
    diviseur <- diviseur + 2 // On teste uniquement les diviseurs impairs
  FinTant que

  // Si aucun diviseur n'a été trouvé, n est premier
  Retourner Vrai
FinFonction
```

L'algorithme est efficace car :

- Il élimine rapidement les nombres pairs
- Il ne teste que les diviseurs impairs
- Il s'arrête à la racine carrée de n, ce qui réduit considérablement le nombre de divisions à effectuer
- Il retourne Faux dès qu'un diviseur est trouvé, sans avoir à tester tous les nombres jusqu'à $\sqrt{n}$

Explication de l'algorithme :

1. On traite d'abord les cas particuliers : 0 et 1 ne sont pas premiers, 2 et 3 sont premiers.

2. Si n est pair et supérieur à 2, il n'est pas premier.

3. On teste ensuite la divisibilité par tous les nombres impairs à partir de 3, jusqu'à la racine carrée de n.

4. Si aucun diviseur n'est trouvé, alors n est premier.