

Activité

Critères de divisibilité par 2, 3, 5, 7, 11 et 13



Exercice 1

Soit n un entier naturel dont l'écriture décimale est $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$. Par exemple, pour $n = 123$, on a $a_0 = 3$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 1$.

- Exprimer n comme une somme de puissances de 10 multipliées par les chiffres correspondants.
- Montrer que pour tout entier $i \geq 1$, 10^i est divisible par 2 et que 10^0 n'est pas divisible par 2.
- En déduire que n est divisible par 2 si et seulement si a_0 est divisible par 2.
- Conclure en énonçant le critère de divisibilité par 2.

Solution de l'exercice 1

- $n = a_k \times 10^k + a_{k-1} \times 10^{k-1} + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$
- Pour tout $i \geq 1$, $10^i = 10 \times 10^{i-1}$ est pair, donc divisible par 2.
Et $10^0 = 1$, qui n'est pas divisible par 2.
-

$$n = a_k \times 10^k + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$$

Tous les termes $a_i \times 10^i$ pour $i \geq 1$ sont divisibles par 2 (car 10^i est divisible par 2). Donc la divisibilité de n par 2 dépend uniquement de la divisibilité de a_0 par 2.

- Un nombre est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités est pair (0, 2, 4, 6 ou 8).



Exercice 2

Soit n un entier naturel dont l'écriture décimale est $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$.

- Calculer le reste dans la division euclidienne de 10 par 3.
- Montrer que, pour tout entier naturel i , le reste dans la division euclidienne de 10^i par 3 est égal à 1.
- En déduire que le reste dans la division euclidienne de n par 3 est le même que celui de la somme de ses chiffres.
- Énoncer le critère de divisibilité par 3.

Solution de l'exercice 2

- $10 = 3 \times 3 + 1$, donc le reste dans la division euclidienne de 10 par 3 est 1.
- Montrons par récurrence que le reste dans la division euclidienne de 10^i par 3 est égal à 1 pour tout $i \geq 0$.
Pour $i = 0$: $10^0 = 1 = 3 \times 0 + 1$, donc le reste est 1.

Supposons que, pour un certain i , le reste dans la division de 10^i par 3 est 1, c'est-à-dire qu'il existe un entier q tel que $10^i = 3q + 1$.

Alors

$$\begin{aligned} 10^{i+1} &= 10 \times 10^i \\ &= 10 \times (3q + 1) \\ &= 10 \times 3q + 10 \\ &= 3 \times (10q + 3) + 1 \end{aligned}$$

- Donc le reste dans la division de 10^{i+1} par 3 est
- également 1.

$$n = a_k \times 10^k + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$$

D'après b), chaque 10^i a pour reste égal à 1 dans la division par 3. Donc :

$$\begin{aligned} n &= a_k \times (3q_k + 1) + a_{k-1} \times (3q_{k-1} + 1) \\ &\quad + \dots + a_1 \times (3q_1 + 1) + a_0 \times (3q_0 + 1) \\ &= 3(a_k q_k + a_{k-1} q_{k-1} + \dots + a_1 q_1 + a_0 q_0) \\ &\quad + (a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0) \end{aligned}$$

Ainsi, n et $(a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0)$ ont le même reste dans la division par 3.

- Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Remarque : la preuve du critère de divisibilité par 9 est analogue.



Exercice 3

Soit n un entier naturel dont l'écriture décimale est $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$.

- Montrer que pour tout entier $i \geq 1$, 10^i est divisible par 5.
- En déduire que n est divisible par 5 si et seulement si a_0 est divisible par 5.
- Énoncer le critère de divisibilité par 5.

Solution de l'exercice 3

- Pour tout $i \geq 1$, $10^i = 10 \times 10^{i-1}$.
- $10 = 2 \times 5$, donc 10^i est divisible par 5.

$$n = a_k \times 10^k + a_{k-1} \times 10^{k-1} + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$$

Tous les termes $a_i \times 10^i$ pour $i \geq 1$ sont divisibles par 5 (car 10^i est divisible par 5). Donc la divisibilité de n par 5 dépend uniquement de la divisibilité de a_0 par 5.

- Un nombre est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.



Exercice 4

Soit n un entier naturel dont l'écriture décimale est $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$.

- Calculer les restes dans la division euclidienne par 11 de 10 , 10^2 , 10^3 et 10^4 .
- Observer un cycle et conjecturer une formule générale pour le reste dans la division de 10^i par 11.
- En déduire que n et

$$(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^k a_k)$$

ont le même reste dans la division par 11.

- Énoncer le critère de divisibilité par 11.

Solution de l'exercice 4

- Calculons les restes dans la division par 11 :
 $10 = 11 \times 0 + 10$, donc le reste est 10 ou -1 (car $10 = 11 - 1$)
 $10^2 = 100 = 11 \times 9 + 1$, donc le reste est 1
 $10^3 = 1000 = 11 \times 90 + 10 = 11 \times 91 - 1$, donc le reste est -1 ou 10
 $10^4 = 10000 = 11 \times 909 + 1$, donc le reste est 1

- On observe que le reste dans la division de 10^i par 11 alterne entre 1 et -1 (ou 10) :
 - Si i est pair, le reste est 1
 - Si i est impair, le reste est -1 (ou 10 si on préfère un reste positif)

On peut écrire cela comme 10^i a pour reste de $(-1)^i$ dans la division par 11.

c)

$$n = a_k \times 10^k + a_{k-1} \times 10^{k-1} + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$$

D'après (b), chaque 10^i donne un reste de $(-1)^i$ dans la division par 11. Donc :

$$\begin{aligned} n &= a_k \times (11q_k + (-1)^k) \\ &\quad + a_{k-1} \times (11q_{k-1} + (-1)^{k-1}) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + a_1 \times (11q_1 + (-1)^1) \\ &\quad + a_0 \times (11q_0 + (-1)^0) \\ &= 11(a_k q_k + a_{k-1} q_{k-1} + \dots + a_1 q_1 + a_0 q_0) \\ &\quad + (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^k a_k) \end{aligned}$$

Ainsi, n et $(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^k a_k)$ ont le même reste dans la division par 11.

- Un nombre est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11, c'est-à-dire si $(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^k a_k)$ est divisible par 11.



Exercice 5

Soit n un entier naturel. On considère l'algorithme suivant :

- On sépare le chiffre des unités a du nombre.
 - On forme b le nombre obtenu en retirant le chiffre des unités de n .
 - On calcule $c = b - 2a$.
- a) Exprimer n en fonction de a et b .
 - b) Calculer le reste dans la division euclidienne de 21 par 7.
 - c) Montrer que n est divisible par 7 si et seulement si c est divisible par 7.
 - d) Appliquer cet algorithme à 133 pour vérifier s'il est divisible par 7.
 - e) Appliquer le même algorithme au nombre 3 829 (il y aura besoin de plusieurs itérations).
 - f) Appliquer l'algorithme au nombre 4 652 et conclure.

Solution de l'exercice 5

- a) Si b est le nombre obtenu en retirant le dernier chiffre de n , et a est ce dernier chiffre, alors

$$n = 10 \times b + a$$

- b) $21 = 7 \times 3 + 0$, donc 21 est divisible par 7 et le reste est 0.
- c) Calculons :

$$\begin{aligned} c = b - 2a &\iff 10c = 10b - 20a \\ &\iff 10c + 21a = 10b - 20a + 21a \\ &\iff 10c + 21a = 10b + a \\ &\iff 10c + 21a = n \end{aligned}$$

Or $21a = 7 \times 3a$, qui est divisible par 7. Donc n est divisible par 7 si et seulement si $10c$ est divisible par 7.

Comme le plus grand diviseur commun à 10 et 7 est 1, $10c$ est divisible par 7 si et seulement si c est divisible par 7.

Donc

n est divisible par 7 si et seulement si $c = b - 2a$ est divisible par 7.

- d) Appliquons l'algorithme au nombre 133 :

Première itération :

- $a = 3$ (dernier chiffre)
- $b = 13$ (nombre restant)
- $c = b - 2a = 13 - 2 \times 3 = 13 - 6 = 7$

$c = 7$ est divisible par 7, donc 133 est divisible par 7.

Vérification : $133 = 7 \times 19$ est bien divisible par 7.

- e) Appliquons l'algorithme au nombre 3 829 :

Première itération :

- $a = 9$ (dernier chiffre)
- $b = 382$ (nombre restant)
- $c = b - 2a = 382 - 2 \times 9 = 382 - 18 = 364$

Comme 364 n'est pas immédiatement reconnaissable comme multiple de 7, continuons l'algorithme avec 364 :

Deuxième itération :

- $a = 4$ (dernier chiffre)
- $b = 36$ (nombre restant)
- $c = b - 2a = 36 - 2 \times 4 = 36 - 8 = 28$

$c = 28$ est divisible par 7 (car $28 = 7 \times 4$), donc 364 est divisible par 7, et par conséquent 3829 est divisible par 7.

Vérification : $3829 = 7 \times 547$ est bien divisible par 7.

- f) Appliquons l'algorithme au nombre 4 652 :

Première itération :

- $a = 2$ (dernier chiffre)
- $b = 465$ (nombre restant)
- $c = b - 2a = 465 - 2 \times 2 = 465 - 4 = 461$

Continuons avec 461 :

Deuxième itération :

- $a = 1$ (dernier chiffre)
- $b = 46$ (nombre restant)
- $c = b - 2a = 46 - 2 \times 1 = 46 - 2 = 44$

Continuons avec 44 :

Troisième itération :

- $a = 4$ (dernier chiffre)
- $b = 4$ (nombre restant)
- $c = b - 2a = 4 - 2 \times 4 = 4 - 8 = -4$

$c = -4$ n'est pas divisible par 7, donc 4652 n'est pas divisible par 7.

Vérification : $4652 = 7 \times 664 + 4$. Donc 4652 n'est pas divisible par 7.



Exercice 6

Soit n un entier naturel dont l'écriture décimale est $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$.

- Observer un motif et conjecturer une formule générale pour le reste dans la division de 10^i par 13.
- On considère l'algorithme suivant pour vérifier si un nombre est divisible par 13 :
 - On sépare le dernier chiffre a du nombre.
 - On calcule $b = n'$, le nombre obtenu en retirant ce dernier chiffre.
 - On calcule $c = b + 4a$.

Montrer que n est divisible par 13 si et seulement si c est divisible par 13.

- Appliquer cet algorithme à 91 pour vérifier s'il est divisible par 13.
- Appliquer le même algorithme au nombre 2 197 (il y aura besoin de plusieurs itérations).
- Appliquer l'algorithme au nombre 1 248 et conclure.

Solution de l'exercice 6

- On peut calculer quelques termes supplémentaires, et on observe que les restes forment un cycle : 10, 9, 12, 3, 4, 1, 10, 9, ..., donc les restes suivent un cycle de longueur 6.

- On veut montrer que n est divisible par 13 si et seulement si $c = b + 4a$ est divisible par 13.

Si $n = 10b + a$ (où a est le dernier chiffre et b est le nombre obtenu en retirant ce dernier chiffre), alors :

$$10c = 10b + 40a$$

Or, $10b + a = n$, donc $10b = n - a$

$$\text{Ainsi, } 10c = (n - a) + 40a = n + 39a = n + 13 \times 3a$$

Comme $13 \times 3a$ est divisible par 13, on en déduit que $10c$ est divisible par 13 si et seulement si n est divisible par 13.

De plus, comme le plus grand diviseur commun de 10 et 13 est 1, $10c$ est divisible par 13 si et seulement si c est divisible par 13.

Donc n est divisible par 13 si et seulement si $c = b + 4a$ est divisible par 13.

- Appliquons l'algorithme au nombre 91 :

- $a = 1$ (dernier chiffre)
- $b = 9$ (nombre restant)
- $c = b + 4a = 9 + 4 \times 1 = 9 + 4 = 13$

$c = 13$ est divisible par 13, donc 91 est divisible par 13.

Vérification : $91 = 13 \times 7$ est bien divisible par 13.

- Appliquons l'algorithme au nombre 2 197 :

Première itération :

- $a = 7$ (dernier chiffre)
- $b = 219$ (nombre restant)
- $c = b + 4a = 219 + 4 \times 7 = 219 + 28 = 247$

Comme 247 n'est pas immédiatement reconnaissable comme multiple de 13, continuons l'algorithme avec 247 :

Deuxième itération :

- $a = 7$ (dernier chiffre)
- $b = 24$ (nombre restant)
- $c = b + 4a = 24 + 4 \times 7 = 24 + 28 = 52$

Continuons avec 52 :

Troisième itération :

- $a = 2$ (dernier chiffre)
- $b = 5$ (nombre restant)
- $c = b + 4a = 5 + 4 \times 2 = 5 + 8 = 13$

$c = 13$ est divisible par 13, donc 52 est divisible par 13, et par conséquent 247 et 2 197 sont divisibles par 13.

Vérification : $2\,197 = 13^3$ est bien divisible par 13.

- Appliquons l'algorithme au nombre 1 248 :

Première itération :

- $a = 8$ (dernier chiffre)
- $b = 124$ (nombre restant)
- $c = b + 4a = 124 + 4 \times 8 = 124 + 32 = 156$

Continuons avec 156 :

Deuxième itération :

- $a = 6$ (dernier chiffre)
- $b = 15$ (nombre restant)
- $c = b + 4a = 15 + 4 \times 6 = 15 + 24 = 39$

$c = 39 = 13 \times 3$ est divisible par 13, donc 156 est divisible par 13, et par conséquent 1 248 est divisible par 13.

Vérification : $1\,248 = 13 \times 96$ est bien divisible par 13.