

Séquence XI – Arithmétique (1/3)

Diviseurs et nombres premiers



Exercice XI.1

Montrer que la différence des carrés de deux entiers consécutifs est un nombre impair.



Exercice XI.2

Montrer que la différence des carrés de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 8.



Exercice XI.3

Évariste affirme que pour tout entier n positif, le nombre

$$a = 2^n \times 3^n \times 7^n + 2^n \times 21^n \times 5 + 6^n \times 7^n \times 4$$

est divisible par 10. A-t-il raison ?



Exercice XI.4

Soient a , b et d trois entiers. Montrer que si d divise a et d divise b , alors d divise $a + b$ et $a - b$.



Exercice XI.5

Soient a , b et c trois entiers. Montrer que si a divise b et b divise c , alors a divise c .



Exercice XI.6

Soient a et b deux entiers. Montrer que si a divise b , alors a^2 divise b^2 .



Exercice XI.7

Soit un entier $n \geq 3$. On pose $a = n^2 - 2n - 3$. Existe-t-il des valeurs de n telles que a soit premier ?



Exercice XI.8

- Montrer que tout nombre premier p strictement supérieur à 5 est de la forme $6k + 1$ ou $6k + 5$, avec k entier naturel.
- Montrer que si, de plus, $p + 2$ est premier, alors p n'est que de l'une des deux formes ci-dessus.
- Montrer qu'il n'est pas possible que les entiers p , $p + 2$ et $p + 4$ soient premiers simultanément.



Exercice XI.9

Montrer que la somme de trois entiers positifs impairs consécutifs n'est jamais un nombre premier.



Exercice XI.10 : Identité de Sophie Germain

- Développer $(a^2 + 2b^2)^2$.
- Déterminer les entiers strictement positifs a et b tels que $a^4 + 4b^4$ est un nombre premier.



Exercice XI.11

En étudiant les restes des divisions euclidiennes par 3, déterminer les nombres premiers p tels que $2^p + p^2$ est premier.



Exercice XI.12

Soit n un nombre premier. Déterminer dans quel(s) cas l'entier $n^2 + 1$ est premier.



Exercice XI.13

- Développer l'expression $(x - 1)(x^2 + x + 1)$, où x est un réel quelconque.
- Montrer sans calculs inutiles que le nombre entier $2^{108} - 1$ n'est pas un nombre premier.
- Déterminer son plus petit diviseur premier.



Exercice XI.14

Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 189, puis de 450, puis des entiers : 720 ; 63×47 ; 2309 ; 12 936 et $24^5 \times 38^3$.



Exercice XI.15

- Décomposer 26 460 en produit de facteurs premiers.
- Déterminer le plus petit entier strictement positif qui, lorsqu'il est multiplié par 26 460, donne le cube d'un nombre entier.



Exercice XI.16

Déterminer si les nombres 283 et 481 sont premiers ou **composés** (c'est-à-dire qui n'est pas premier).



Exercice XI.17

Déterminer, en expliquant la méthode employée, le nombre premier qui suit le nombre 5 039.

Séquence XI – Arithmétique (2/3)

Quelques exemples de décompositions



Exercice XI.18

Déterminer la fraction irréductible égale à

$$\frac{31\,122}{100\,947}$$



Exercice XI.19

Déterminer, grâce à la méthode de décomposition en produit de facteurs premiers, s'il existe des valeurs de l'entier n pour que, parmi les couples suivants, l'un des nombres soit un diviseur de l'autre :

1. $p = 680$ et $q = 2550 \times 2^n$
2. $r = 22264$ et $s = 1012 \times 11^n$
3. $t = 144 \times 7^n$ et $u = 1029 \times 2^n$



Exercice XI.20

Montrer que le nombre de diviseurs d'un entier n strictement positif est impair si et seulement si n est un carré parfait.



Exercice XI.21

Déterminer l'entier naturel a pour que l'entier $N = 25 \times 6^a$ ait 48 diviseurs.



Exercice XI.22

1. Déterminer les écritures possibles des entiers ayant exactement quatre diviseurs.
2. Déterminer le plus petit d'entre eux.



Exercice XI.23

1. Déterminer l'entier naturel a pour que l'entier $n = 2^a \times 3^{2a+2}$ ait 21 diviseurs.
2. Déterminer l'entier naturel b pour que l'entier $N = 9 \times 10^b$ ait 27 diviseurs.



Exercice XI.24

Déterminer l'entier positif n ayant cinq diviseurs positifs et tel que $n - 16$ est le produit de deux nombres premiers



Exercice XI.25

Déterminer les entiers positifs n n'ayant pour diviseurs premiers que 2 et 3 et tels que le nombre de diviseurs de n^2 est le triple de celui de n .



Exercice XI.26

Soit p et q deux nombres premiers consécutifs supérieurs ou égaux à 3 tels que $p < q$.

1. Montrer que le nombre $N = \frac{p+q}{2}$ est un entier qui divise $p+q$ et qui vérifie $p < N < q$.
2. En déduire que la somme $p+q$ est le produit d'au moins trois nombres premiers (éventuellement égaux).



Exercice XI.27

Écrire un algorithme effectuant la décomposition en facteurs premiers d'un entier entré par l'utilisateur.



Exercice XI.28

Écrire un algorithme effectuant qui renvoie si un nombre n entré par l'utilisateur est premier ou non.

Séquence XI – Arithmétique (3/3)

Exercices complémentaires

Exercice XI.29 : preuve de Thomas Joannes Stieltjes de l'infinitude des nombres premiers

Cette démonstration est une démonstration par l'absurde. Soit $P = \{p_1; p_2; \dots; p_n\}$ et $N = \prod_{i=1}^n p_i$.

On écrit $N = a \times b$ avec a et b entier strictement supérieurs à 1. Pour tout i de 1 à n , montrer que p_i ne divise pas $a + b$ et conclure.

Exercice XI.30 : preuve de Pierre de Fermat de l'infinitude de nombres premiers

On définit les nombres de Fermat par :

Pour tout entier n positif ou nul, $F_n = 2^{(2^n)} + 1$.

1. Montrer que $F_{n+1} = 2 + \prod_{k=0}^n F_k$.

2. Montrer que, pour tous entiers n et k ,

$$F_{n+k} - 1 = (F_n - 1)^{(2^n)}$$

3. Montrer alors que, pour tout entier $k > 0$, F_n divise $F_{n+k} - 2$.

4. Montrer ensuite que deux nombres de Fermat distincts sont toujours premiers entre eux.

5. Montrer enfin qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice XI.32 : on peut trouver deux nombres premiers consécutifs aussi éloignés l'un de l'autre que l'on veut

On rappelle que, pour n entier strictement positif, $n!$ (appelé **factoriel** n) est le produit des entiers entre 1 et n .

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et k un entier entre 2 et n . Montrer que $n! + k$ n'est pas premier.

2. Conclure.

Exercice XI.33 : Somme des diviseurs positifs d'un entier

1. Soit p et q deux nombres premiers distincts. On définit l'entier N par : $N = p^2 q$. Montrer que la somme des diviseurs de N est

$$S(N) = \frac{p^3 - 1}{p - 1} \times \frac{q^2 - 1}{q - 1}$$

2. En déduire la somme des diviseurs de l'entier 2299.

3. Déterminer un nombre divisible par exactement deux nombres premiers, ayant six diviseurs, et dont la somme des diviseurs est 39.

Remarque : Pour information, la somme des diviseurs de $\prod_{i \in \mathbb{N}^*} p_i^{\alpha_i}$ est

$$\prod_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{p_i^{\alpha_i + 1} - 1}{p_i - 1}$$

Exercice XI.31 : preuve de l'infinitude de nombres premiers de la forme $4n + 3$

Soit p un nombre premier et soit

$$q = (2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \dots \times p) - 1.$$

1. Préciser le reste de la division euclidienne de q par 4.

2. Montrer que q n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à p .

3. Montrer que q admet au moins un diviseur strictement supérieur à p qui est congru à 3 modulo 4.

4. Conclure