

Séquence X – Exponentielle

Propriétés algébriques

Exercice X.1

Simplifier les expressions suivantes (où x est un réel quelconque) :

- $A = \exp(7) \times \exp(-4)$
- $B = \frac{\exp(2,8)}{\exp(0,8)}$
- $C = \exp(2 - \sqrt{2}) \times \exp(2 + \sqrt{2})$
- $D = e \times e^5 \times e^{-3}$
- $E = \frac{e^3 \times e^{-2}}{e^4}$
- $F = \frac{(e^{-1})^3 \times e^2}{e^{-4}}$
- $G = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + 1}$
- $H = \frac{e^{-x}}{e^x} + \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{e^{-x}} - e^{3x}$
- $I = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1}$

Exercice X.2

Démontrer que, pour tout réel x ,

$$e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$$

et simplifier :

- $J = \sqrt{e} \times e^2$
- $K = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{e}}$
- $L = \sqrt{e^{-4}} \sqrt{e}$

Exercice X.3

Démontrer que la fonction h définie, pour tout réel x par : $h(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$ est une fonction constante.

Exercice X.4

Démontrer que, pour tout réel x ,

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

Exercice X.5

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2. Démontrer que la suite (e^{u_n}) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

Exercice X.6

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$
2. Calculer $f(x) + f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que la courbe représentative de f admet un centre de symétrie.

Exercice X.7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- | | |
|-----------------------|--------------------------------------|
| a) $\exp(2x - 3) = 1$ | d) $e^{3x} + 1 = e^{1-5x}$ |
| b) $e^x = 2$ | e) $e^{4x+1} = 3$ |
| c) $e^{-2x} = -2$ | f) $e^{\frac{3}{2}x - \sqrt{2}} = 1$ |

Exercice X.8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- | | |
|----------------------------------|--------------------------|
| a) $(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$ | c) $e^{(x-4)(2x-1)} = e$ |
| b) $e^{x^2-16} = 144$ | d) $e^{-x} + e^x = 2$ |
| e) $e^x - 5 + \frac{6}{e^x} = 0$ | |
| f) $2e^x(e^x - 6e^{-x}) = 5e^x$ | |

Exercice X.9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- | | |
|----------------------------------|--|
| a) $e^{3x+1} > 0$ | f) $e^{2x+2} - e^{3x-5} < 0$ |
| b) $e^{\frac{1}{2}x+1} \leq -2$ | g) $e^{2x} - 7e^x + 3 \geq 0$ |
| c) $e^{-5x+2} < 1$ | h) $2e^{2x} + e^x - 3 < 0$ |
| d) $\exp(3x + 14) < \frac{3}{2}$ | i) $\frac{e^x - 1}{e^{2x} - 2} \geq 0$ |
| e) $e^{-2x+3} < 3$ | j) $\frac{1}{e^{3x} - 1} > 2$ |

Exercice X.10

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{S}_1$: $\begin{cases} e^x \times e^{2y-1} = 1 \\ e^{x+2} e^y = e \end{cases}$

Exercice X.11

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{S}_2$: $\begin{cases} e^x + e^y = 1 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases}$

Séquence X – Exponentielle

Études de fonctions (1/2)

Exercice X.12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{2e^x + 3}{e^x - 1}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Justifier que le point $I\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
- Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Exercice X.13

Soit a et b deux réels et f la fonction définie pour tout x réel par :

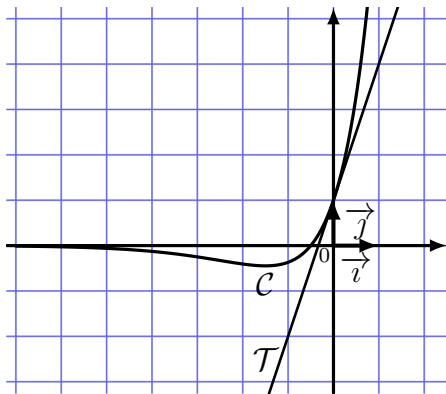
$$f(x) = (ax + b)e^x$$

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est donnée ci-après.

$\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées $(0; 1)$.

On note $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

$\mathcal{T}$ passe par le point de coordonnées $(1; 4)$.



- Calculer a et b .
- Justifier les résultats donnés dans le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}$	$+\infty$

Exercice X.14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (-x + 3)e^x$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Parmi les quatre affirmations suivantes, indiquer celles qui sont vraies. Justifier.

- Pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq -x + 3$
- La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
- La fonction f admet un unique extremum.
- Pour tout réel $m \neq e^2$, l'équation $f(x) = m$ admet soit aucune solution, soit deux solutions.

Exercice X.15

Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et justifier que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.
- Justifier que, pour tout x réel,

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

- Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à ses asymptotes.

Exercice X.16

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{5x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{-x^2 + 3x - 4}{3x^2 - 5x + 8}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \exp\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1 + e^{-x})$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^{\frac{x}{2}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3e^x - 10^{99}x)$

Séquence X – Exponentielle

Études de fonctions (2/2)

Exercice X.17

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$$

On appelle $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- (a) Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
(b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Étudier les variations de f et en dresser le tableau de variation.
- Démontrer que $\mathcal{C}$ ne coupe l'axe des abscisses qu'en un seul point dont on déterminera l'abscisse α à 0,1 près par défaut.
- (a) Démontrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations respectives $y = x$ et $y = x + 2$ sont asymptotes à $\mathcal{C}$.
(b) Étudier les positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ par rapport à $\mathcal{C}$.
(c) Démontrer que le point $I(0; 1)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
- Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ en I .

Exercice X.18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Étudier les variations de f .
- Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Soit $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$.
(a) Démontrer que A est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
(b) Démontrer que $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$ est une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en A .
- On se propose de déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$. Pour cela, on pose, pour tout x réel :

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right)$$

Étudier les variations de g puis conclure.

Exercice X.19

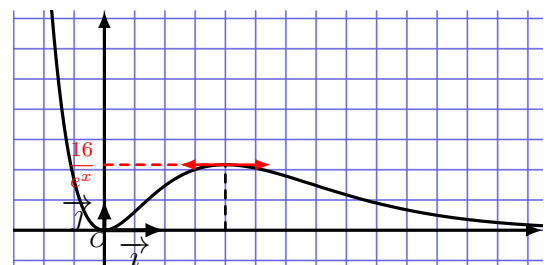
- Étudier les limites et les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - e^{-x}$.
- Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \leq 2$ et vérifier graphiquement le résultat obtenu.

Exercice X.20

- Soit f la fonction définie pour tout x réel par : $f(x) = e^{-2x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(a) Étudier les limites de f et préciser les asymptotes éventuelles de $\mathcal{C}$.
(b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- Soit g la fonction définie pour tout x réel par : $g(x) = e^{-x^2}$ et $\mathcal{C}'$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(a) Étudier les limites de g et préciser les asymptotes éventuelles de $\mathcal{C}'$.
(b) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
- Justifier l'équivalence $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in]0; 2[$
En déduire les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Exercice X.21

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ où a, b et c sont des réels. La courbe représentative de cette fonction est donnée ci-dessous.



- En choisissant certaines informations données par le dessin, justifier que : $a = 4$ et $b = c = 0$.
- Étudier les limites et les variations de f puis dresser son tableau de variations.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet trois solutions dont on donnera des encadrements d'amplitude 10^{-2} .

Séquence X – Exponentielle

Exercices supplémentaires

Exercice X.22

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$
- $\exp(x^2 + 6x) = \frac{1}{e^9}$
- $\frac{e^x + 1}{2e^x - 1} < 2$

Exercice X.23

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $e^{2x+\ln 2} + e^{x+\ln 5} = 3$
- $e^{3x+1} + e^{2x+1} = 6e^{x+1}$
- $e^{2+x} \geq 3e^{-x}$
- $e^x \geq -1$

Exercice X.24

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

- $e^x \geq e^{2x+3}$
- $1 \leq e^{2x+4} \leq 2$
- $e^{2x+3} - 3e^{2x+3} \geq 5e^{3+x}$
- $e^x - 4 < 5e^{-x}$

Exercice X.25

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, préciser son ensemble de dérivabilité puis calculer sa fonction dérivée.

- $f(x) = x^2 e^{3x-1}$
- $g(x) = (x+1)e^x$
- $h(x) = x \exp\left(\frac{1}{x}\right)$
- $k(x) = \frac{e^{x+1}}{e^x + 1}$
- $m(x) = \exp\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$
- $n(x) = \exp\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}x\right)$

Exercice X.26

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 e^{-x^2}$ de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.

- Démontrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$.
- Étudier la limite de f en $+\infty$; quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
- Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$ et dresser le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.
- Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère.

Exercice X.27

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et que pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

En déduire les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations complet.

- Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

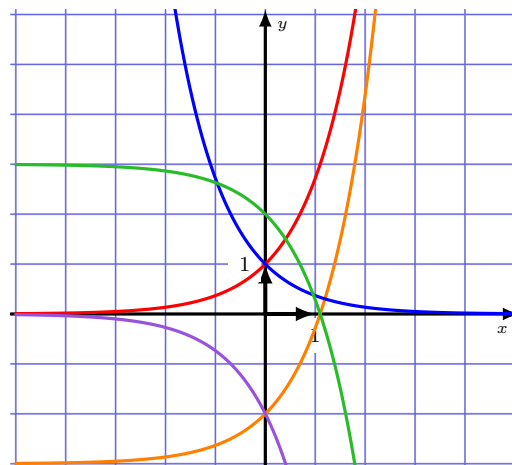
Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$

- Tracer la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice X.28

Sur le graphique ci-dessous, identifier les courbes de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

- $f(x) = e^x$
- $g(x) = e^x - 3$
- $h(x) = e^{-x}$
- $p(x) = -2e^x$
- $q(x) = 3 - e^x$



Séquence X – Exponentielle

Exercices d'approfondissement

Exercice X.29

On considère l'algorithme ci-dessous, où la variable n est un entier naturel.

$n \leftarrow 0$

Tant que $e^n < 100$

$n \leftarrow n + 1$

Afficher n

- Justifier que l'algorithme se termine, c'est-à-dire que la condition de la boucle Tant que ne sera pas toujours vraie.
- Exécuter cet algorithme.
- En déduire le plus petit entier naturel n pour lequel $e^n \geq 100$.
- Modifier l'algorithme de façon à déterminer le plus petit entier n tel que $e^n > 1000$.

Exercice X.30

- « La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{2x}$ vérifie l'égalité $f' = f$ ». Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.
- On cherche une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour $x \in \mathbb{R}$, $4f'(x) + 3f(x) = 0$. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont solutions de cette équation ?
 - $g(x) = e^x$
 - $p(x) = e^{\frac{-3x}{4}}$
 - $h(x) = 0$
 - $q(x) = 4e^{-3x}$

Exercice X.31

Par suite d'une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0; 10]$ et telle que $f'(t) = 0,14f(t)$.

- Montrer que la fonction f définie sur $[0; 10]$ par $f(t) = Ae^{0,14t}$ convient.
- On suppose que $f(0) = 50\,000$. Déterminer A .
- Déterminer les variations de f sur $[0; 10]$.
- À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3 h puis 5 h 30 min.
 - À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura doublé. Arrondir à l'heure près.

Exercice X.32

La fonction **cosinus hyperbolique**, notée $\cosh$ ou encore ch , est définie par

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- Déterminer la dérivée de cette fonction. On la notera sh .
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$$

- Montrer que la fonction ch est paire, et que la fonction sh est impaire.

Exercice X.33

Soient a et b deux réels fixés. La fonction $f_{a,b}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = e^{ax+b}$ est-elle convexe pour tous réels a et b ?

Exercice X.34

On étudie ici la parité éventuelle de la fonction exponentielle.

- On suppose dans cette question que la fonction exponentielle est une fonction paire.
 - Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $(\exp(x))^2 = 1$.
 - En déduire alors que la fonction exponentielle est constante.
 - Conclure : la fonction exponentielle est-elle paire ?
- Montrer que la fonction exponentielle n'est pas non plus une fonction impaire.

Exercice X.35

On a démontré dans le cours que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, e^{x \times n} = (e^x)^n$$

Démontrer que,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, e^{x \times n} = (e^x)^n$$