

Exponentielle

1. Introduction et contexte historique

En 1676, Newton a envoyé deux lettres nommées *Epistola prior* et *Epistola posterior* à Leibniz dans lesquelles il affirme avoir trouvé une toute nouvelle façon d'écrire les puissances. Leibniz utilisera les concepts découverts par Newton et emploiera dans ses travaux l'exposant « variable » (que l'on retrouve par exemple dans 10^x). Ces concepts reposent sur une nouvelle fonction que l'on va étudier dans ce chapitre.

On suppose qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1$$

1. En étudiant la fonction j définie, pour tout x réel, par $j(x) = f(x) \times f(-x)$ sur $\mathbb{R}$, montrer que

$$f(x) \times f(-x) = 1$$

Indication : une fonction est constante si et seulement si sa dérivée est nulle¹.

2. Dédire de la question précédente que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$$

3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

4. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{f(x+b)}{f(b)}$$

où b est un réel.

- (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = g(x)$.
- (b) Montrer que $g(0) = 1$
- (c) En déduire que $g = f$
- (d) Montrer que $f(x) \times f(b) = f(x+b)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (e) Conclure que, si $a \in \mathbb{R}$, alors

$$f(a+b) = f(a) \times f(b)$$

1. Rappel : si a et b sont deux réels et u une fonction dérivable, alors $u'(ax+b) = a \times u'(x)$

5. En utilisant le fait que $a+b = a+(-b)$, montrer que $f(a-b) = \frac{f(a)}{f(b)}$.

6. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$f(na) = (f(a))^n$$

7. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

- (b) En déduire que f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
- (c) Conclure que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

8. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

9. Montrer que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = x + 1$$

10. Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = f(x) - x - 1$$

- (a) Dresser le tableau de variations de la fonction h , et montrer qu'elle admet un minimum en 0
- (b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq x + 1$

11. En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$.

2. Théorème et définition

■ THÉORÈME :

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

■ DÉFINITION :

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et est notée $\exp$. Ainsi :

- $\exp(0) = 1$
- pour tout réel x , $\exp'(x) = \exp(x)$.

Démonstration. • L'existence est admise.

- Montrons l'unicité : soit g une éventuelle autre fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\begin{cases} g' = g \\ g(0) = 1 \end{cases}$. Montrons que $g = \exp$.

On a démontré dans la question 2 de l'activité introductive que la fonction $\exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: ceci autorise à définir la fonction k

sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = \frac{g(x)}{\exp(x)}$. Ainsi pour tout réel x : $g(x) = k(x) \exp(x)$ et la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) &= g(x) \\ \iff k'(x) \exp(x) + k(x) \exp'(x) &= k(x) \exp(x) \\ \iff k'(x) \exp(x) + k(x) \exp(x) &= k(x) \exp(x) \\ \iff k'(x) \exp(x) &= 0 \end{aligned}$$

Mais comme $\exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors : $\forall x \in \mathbb{R}, k'(x) = 0$ ce qui montre que k est une fonction constante. Comme de plus :

$$k(0) = \frac{g(0)}{\exp(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = 1$
donc $g(x) = \exp(x)$. $\square$

Remarque : Un système comme le système $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ s'appelle un **problème de Cauchy**². C'est un système avec une **équation différentielle** et **condition initiale**. Nous étudierons cela plus en détail en terminale.

■ PROPRIÉTÉ :

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. C'est la question 7 de l'activité introductive. Or, pour démontrer cela dans l'activité introductive, on utilise les propriétés algébriques de la fonction exponentielle. On propose donc une autre preuve, pour la cohérence du cours.

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$. Si elle changeait de signe sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires impliquerait qu'elle s'annule. Or, on a démontré à la question 2 de l'activité introductive qu'elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par conséquent la fonction exponentielle ne change pas de signe et comme $\exp(0) = 1 > 0$, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$. $\square$

■ COROLLAIRE :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. C'est la question 8 de l'activité introductive. $\square$

². Augustin Louis Cauchy, mathématicien français (1789-1857)

3. Propriétés algébriques

■ PROPRIÉTÉ :

Pour tout couple de réels $(x; y)$ et pour tout entier naturel n :

- $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$
- $\exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)}$ et $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

Démonstration. Les questions 3, 4, 5 et 6 de l'activité introductive. $\square$

Remarque : La propriété précédente est aussi valable pour $n \in \mathbb{Z}$.

Notation : On peut observer que ces propriétés algébriques vérifiées par les puissances : par exemple, si x, y et n sont des entiers :

$$10^{x+y} = 10^x \times 10^y; 10^{x-y} = \frac{10^x}{10^y} \text{ et } 10^{nx} = (10^x)^n.$$

D'où l'idée de noter la fonction exponentielle sous la forme d'une puissance, ce qui rendra naturelles ses propriétés algébriques.

Remarquons en outre que, pour tout entier relatif :

$$\exp(n) = \exp(1 \times n) = (\exp(1))^n$$

notons e (comme Euler) le nombre $\exp(1)$.

Alors $\exp(n)$ s'écrit e^n , notation qu'on va donc, conformément à l'idée précédente, étendre à tous les réels x : $\exp(x) = e^x$

■ PROPRIÉTÉ :

Pour tout couple de réels $(x; y)$ et pour tout entier relatif n :

- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{nx} = (e^x)^n$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

Remarque : le nombre d'Euler noté e est qui est par définition $\exp(1)$ vaut environ 2,718281828459.

Remarque : e un nombre irrationnel (comme $\sqrt{2}$) mais il est de plus transcendant (comme π), c'est-à-dire qu'il n'existe aucun polynôme à coefficients entiers dont il est racine.

Exemple :

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$$

$$B = e^x + 2e^x = e^x (1 + 2) = 3e^x$$

$$C = (e^x)^{-2} e^{3x} = e^{-2x} e^{3x} = e^{-2x+3x} = e^x$$

$$D = e^{3x+2} e^{1-2x} = e^{3x+2+1-2x} = e^{x+3}$$

$$E = \frac{e^{3x-1}}{e^{2-x}} = e^{3x-1-(2-x)} = e^{3x-1-2+x} = e^{4x-3}$$

4. Étude de la fonction exponentielle

Rappelons les résultats déjà obtenus :

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.
- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, pour tout couple $(a; b) \in \mathbb{R}^2$:

$$e^a > e^b \iff a > b \text{ et } e^x > 1 \iff x > 0$$

■ PROPRIÉTÉ : convexité

La fonction exponentielle est **convexe** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On sait que $\exp$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp''(x) = \exp(x)$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$, donc $\exp''(x) > 0$. Ainsi la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. $\square$

■ PROPRIÉTÉ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

Démonstration.

- D'après les questions 9 et 10 de l'activité introductive : $e^x \geq x + 1$.

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty.$$

Donc, d'après l'un des théorèmes de comparaison,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

- Puis, en posant $X = -x$,

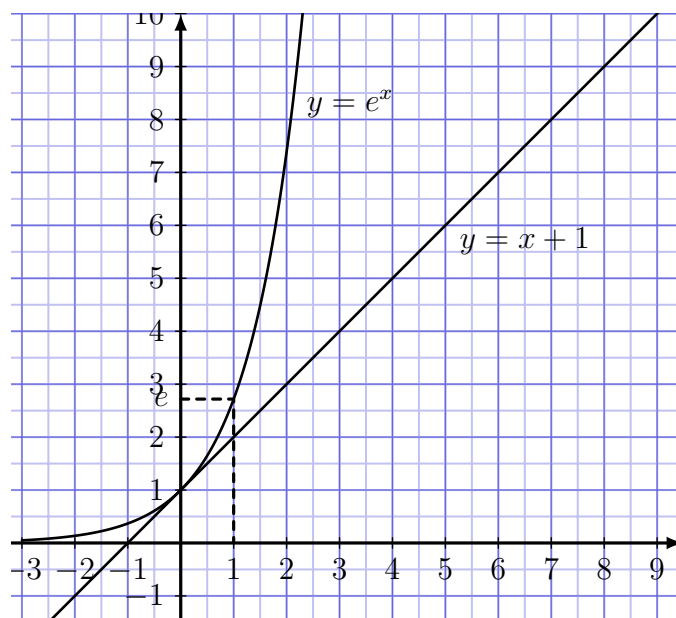
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} \\ &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} \\ &= 0^+ \end{aligned}$$

$\square$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de $\exp'(x)$			+	
Variations de $\exp$		0	1	e $\rightarrow +\infty$

On en déduit l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle, qu'il faut avoir en tête :



■ PROPRIÉTÉ :

La fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$.

Démonstration. Il faut montrer que, quel que soit le réel k strictement positif, l'équation $\exp(x) = k$ admet une unique solution réelle. Soit k un réel strictement positif.

- Par définition, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

- De plus, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Enfin,

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x \right[\\ &=]0; +\infty[\end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de la bijection, $\exp$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$, c'est-à-dire de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$. $\square$

■ DÉFINITION :

La bijection réciproque de la fonction exponentielle s'appelle la fonction **logarithme népérien** : elle est noté $\ln$.

Conséquences immédiates :

$$\begin{cases} e^x = y \\ y > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \ln(y) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x \text{ et } \forall x > 0, e^{\ln(x)} = x.$$

$$\ln(1) = 0 \text{ et } \ln(e) = 1.$$

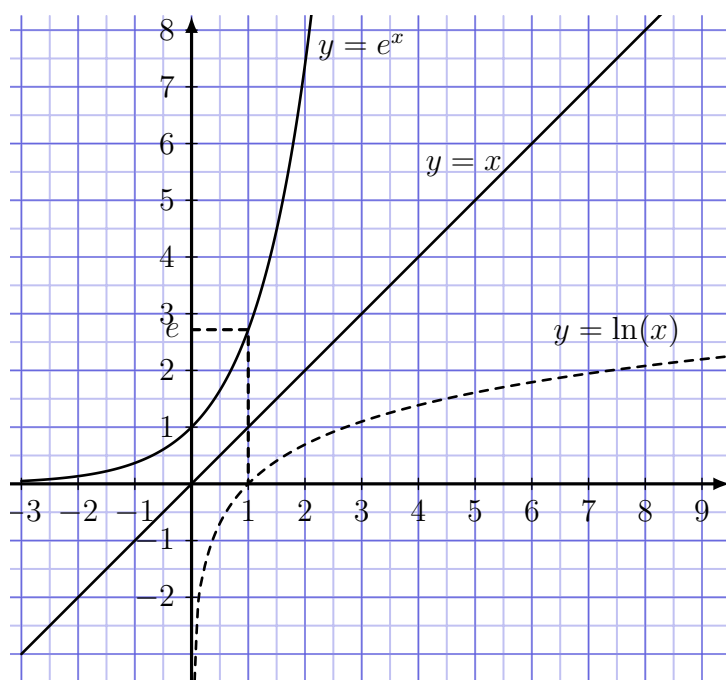
L'étude détaillée de la fonction logarithme népérien sera faite ultérieurement. Pour l'instant, elle ne sera utilisée que pour la résolution d'équations ou inéquations faisant intervenir la fonction exponentielle.

■ RAPPEL :

En tant que bijection réciproque d'une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$, la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

■ PROPRIÉTÉ : (Rappel)

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de deux fonctions réciproques l'une de l'autre sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



■ PROPRIÉTÉ :

Pour tout couple de réels (x, y) ,

$$e^x = e^y \iff x = y \quad \text{et} \quad e^x > e^y \iff x > y$$

Exemple :

Résoudre les équations :

$$\bullet e^{3-x} = 1$$

$$\begin{aligned} e^{3-x} = 1 &\iff e^{3-x} = e^0 \\ &\iff 3 - x = 0 \\ &\iff x = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \{3\}.$$

$$\bullet e^{2x-3} = e$$

$$\begin{aligned} e^{2x-3} = e &\iff e^{2x-3} = e^1 \\ &\iff 2x - 3 = 1 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \{2\}.$$

$$\bullet e^{1-3x} = 2$$

$$\begin{aligned} e^{1-3x} = 2 &\iff e^{1-3x} = e^{\ln(2)} \\ &\iff 1 - 3x = \ln(2) \\ &\iff x = -\frac{\ln(2) - 1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left\{ -\frac{\ln(2) - 1}{3} \right\}.$$

Résoudre les inéquations :

$$\bullet e^{-x} \leq 1$$

$$\begin{aligned} e^{-x} \leq 1 &\iff e^{-x} \leq e^0 \\ &\iff -x \leq 0 \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = [0; +\infty[$$

$$\bullet e^{2x-1} > \sqrt{e}$$

$$\begin{aligned} e^{2x-1} > \sqrt{e} &\iff e^{2x-1} > e^{\frac{1}{2}} \\ &\iff 2x - 1 > \frac{1}{2} \\ &\iff x > \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left] \frac{3}{4}; +\infty \right[$$

■ PROPRIÉTÉ :

Si une fonction u est dérivable sur l'intervalle I alors la fonction $\exp u$ l'est aussi et : $(\exp u)' = u' \exp u$

Démonstration. Par application du théorème de dérivation d'une fonction composée, comme u est dérivable sur I et que $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $\exp u$ est dérivable sur I et

$$\begin{aligned} (\exp u)' &= u' \exp' u \\ &= u' \exp u \end{aligned}$$

Exemple :

La fonction $h : x \mapsto e^{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction carré l'est aussi et, pour tout réel x ,

$$h'(x) = 2xe^{x^2}$$

5. Limites particulières

■ PROPRIÉTÉ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration. C'est la question 11 de l'activité introductive (on interprète cette limite comme un nombre dérivé) $\square$

■ PROPRIÉTÉ : Croissances comparées

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

Démonstration. Soit n un entier naturel non nul.

- On souhaite calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$.

— On s'intéresse d'abord au cas où $n = 1$.
On rappelle l'inégalité de convexité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$$

C'est la question 10 de l'activité introductive, ou une conséquence de la convexité de la fonction exponentielle.

Comme $x + 1 \geq x$, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x$$

ou encore que $\forall x \in \mathbb{R}, e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{x}{2}$

Les deux membres sont positifs,

donc $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq \left(\frac{x}{2}\right)^2$, c'est-à-dire $e^x \geq \frac{x^2}{4}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$.

D'après le théorème de comparaison, on en conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- Montrer que pour tout entier naturel non nul n et tout réel x non nul :

$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n n^{-n}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n n^{-n} &= \frac{e^x}{\left(\frac{x}{n}\right)^n} \times \frac{1}{n^n} \\ &= \frac{e^x}{\frac{x^n}{n^n}} \times \frac{1}{n^n} \\ &= \frac{e^x \times n^n}{x^n} \times \frac{1}{n^n} \\ &= \frac{e^x}{x^n} \end{aligned}$$

On pose $t = \frac{x}{n}$. On sait, d'après le point précédent, que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$.

Par limite de n produits, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$.

n étant un entier strictement positif fixé, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n n^{-n} = +\infty$, d'où le premier résultat attendu.

- Posons $X = -x$.

Alors, si $x \rightarrow -\infty$, on a $X \rightarrow +\infty$.

Il vient $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} (-X)^n e^{-X}$.

Or, $e^{-X} = \frac{1}{e^X}$, donc

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} (-X)^n e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{X^n}{e^X}$$

Or, pour tout X au voisinage de $+\infty$,

$$-\frac{X^n}{e^X} \leq (-1)^n \frac{X^n}{e^X} \leq \frac{X^n}{e^X}.$$

D'après le point précédent, et par limite d'inverse,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^n}{e^X} = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X^n}{e^X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^n}{e^X} = 0.$$

On en conclut, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{X^n}{e^X} = 0, \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

$\square$

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1}$

Pour tout x au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{x^2 + 1} &= \frac{e^x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$.

Donc par limite de produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = +\infty$$

Soit f une fonction qui est sa propre dérivée et qui vérifie $f(0) = 1$. On note

- i) $f' = f$.
- ii) $f(0) = 1$.

1. En étudiant la fonction j définie, pour tout x réel, par $j(x) = f(x) \times f(-x)$ sur $\mathbb{R}$, montrer que

$$f(x) \times f(-x) = 1$$

Indication : une fonction est constante si sa dérivée est nulle.

Démonstration. Soit j la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = f(x) f(-x)$.
Montrons que j est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

j est le produit de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$, donc j est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On considère $u : x \mapsto \exp x$ et $v : x \mapsto f(-x)$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
Ainsi $u' : x \mapsto f(x)$ et $v' : x \mapsto -f(-x)$ par dérivée de fonctions composées.
 j est de la forme uv , donc j' est de la forme $u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}, j'(x) &= f(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f(-x)) \\ &= f(x) f(-x) - f(x) f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $j'(x) = 0$.

Ainsi la fonction j est une fonction constante.

Or, on sait que $f(0) = 1$, donc $j(0) = f(0) \times f(0) = 1 \times 1 = 1$.

On en conclut que pour tout x réel, $j(x) = 1$.

Donc $f(x) f(-x) = 1$. □

2. Dédurre de la question précédente que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et montrons que, pour tout x réel, $f(x) \neq 0$.
On suppose qu'il existe réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

Alors, $f(x_0) \times f(-x_0) = 0 \times f(-x_0) = 0$.

Or, pour tout x réel, $f(x) f(-x) = 1$.

Il y a donc contradiction.

On en conclut que, pour tout x réel, $f(x) \neq 0$. □

3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

Démonstration. D'après iv), $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) f(-x) = 1$.

Or, d'après iii), $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

$$\text{D'où } f(-x) = \frac{1}{f(x)}. \quad \square$$

4. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{f(x+b)}{f(b)}$, où b est un réel.

(a) Montrer que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = g(x)$.

Démonstration. On a $g(x) = \frac{1}{f(b)} \times u(ax+b)$, avec $u = f$ et $a = 1$.

On a $g(x) = kf(x+b)$, avec $k = \frac{1}{f(b)}$, donc $g'(x) = kf'(x+b)$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) &= \frac{1}{f(b)} \times f'(x+b) \\ &= \frac{f'(x+b)}{f(b)} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

D'où le résultat attendu. □

(b) Montrer que $g(0) = 1$.

Démonstration. On a $g(0) = \frac{f(0+b)}{f(b)} = \frac{f(b)}{f(b)} = 1$. □

(c) En déduire que $g = f$.

Démonstration. D'après les questions 2.a) et 2.b), g vérifie $\begin{cases} g' = g \\ g(0) = 1 \end{cases}$.

Donc, par définition de f , g est la fonction f . □

(d) Montrer que $f(x) \times f(b) = f(x+b)$ pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. D'après la question 2.c), $g = f$, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f(x+b)}{f(b)}, \text{ i.e. } f(x) \times f(b) = f(x+b). \quad \square$$

(e) Conclure que, si $a \in \mathbb{R}$, alors $f(a+b) = f(a) \times f(b)$.

Démonstration. D'après la question 2.d), la relation $f(x) \times f(b) = f(x+b)$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, si $a \in \mathbb{R}$, elle est vraie en particulier pour $x = a$.

Ainsi on obtient $f(a) \times f(b) = f(a+b)$. □

5. En utilisant le fait que $a+b = a+(-b)$, montrer que $f(a-b) = \frac{f(a)}{f(b)}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a-b) &= f(a+(-b)) \\ &= f(a) \times f(-b), \text{ d'après 2.e).} \\ &= f(a) \times \frac{1}{f(b)}, \text{ d'après 1).} \\ &= \frac{f(a)}{f(b)} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a-b) = \frac{f(a)}{f(b)}. \quad \square$$

6. Montrer que, pour tout entier naturel n , que $f(na) = (f(a))^n$.

Démonstration. Notons P_n la propriété : $f(na) = f(a)^n$, où n est un entier naturel. Montrons que cette propriété est vraie par récurrence sur $\mathbb{N}$:

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $f(na) = f(0) = 1$ et $f(a)^n = f(a)^0 = 1$. On note que, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $f(a) \neq 0$, donc que $f(a)^0$ est bien définie. Ainsi la propriété est initialisée pour $n = 0$.
- Hérédité : supposons que $f(na) = (f(a))^n$ pour un certain entier n . Alors

$$\begin{aligned} f((n+1)a) &= f(na + a) \\ &= f(na) \times f(a) \\ &= (f(a))^n \times f(a) \\ &= (f(a))^{n+1} \end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire.

- Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(na) = (f(a))^n$$

□

7. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

Démonstration. D'après la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2} \times 2\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

□

(b) En déduire que f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. D'après la question 4.a), on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

Un carré est toujours positif, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

□

(c) Conclure que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. D'après la question 4.b), on a $f(x) \geq 0$.

De plus, d'après la propriété iii), on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.

□

8. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. D'après i), on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$.

Or, d'après la propriété 4.c) : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.

Ainsi $f'(x) > 0$, et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

□

9. Montrer que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$.

Démonstration. D'après le rappel de l'énoncé, l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Ici, on se place en $a = 0$, d'où : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, i.e. $y = f(0)x + f(0)$.

Or, d'après la définition de f , on a $f(0) = 1$, et donc $y = 1(x - 0) + 1$, i.e. $y = x + 1$. □

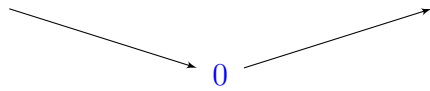
10. Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x - 1$.

(a) Dresser le tableau de variation de la fonction h , et montrer que la fonction admet un minimum en 0.

Démonstration. h est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f'(x) - 1$. D'après i), $f' = f$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f(x) - 1$.

On a ainsi le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

On a que $f'(0) = 0$ et $\begin{cases} \text{si } x \in]-\infty; 0], f'(x) < 0 \\ \text{si } x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0 \end{cases}$.

Donc 0 est bien un minimum de f sur l'intervalle $]-\infty; +\infty[$. □

(b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq x + 1$.

Démonstration. D'après la question 7.b), $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0 \iff f(x) - x - 1 \geq 0$
 $\iff f(x) \geq x + 1$.

D'où le résultat attendu. □

11. En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$.

Indication : on peut remplacer x par h pour s'aider, et remarquer que $x = 0 + x$.

Démonstration. On remplace x par h (h étant présent dans la définition du nombre dérivé).

On considère le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0.

$$\begin{aligned}
 \tau(h) &= \frac{f(h) - 1}{h} \\
 &= \frac{f(h) - f(0)}{h} \\
 &= \frac{f(0+h) - f(0)}{h}
 \end{aligned}$$

On a $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h}$.

Or, par définition du nombre dérivé, $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = f'(0)$.

On sait que $f'(x) = f(x)$ d'après puisque $f(x) = 1$ pour $x = 0$ d'après la définition. Donc $f'(0) = 1$.

On en conclut que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} = 1$.

□