

Exponentielle

1. Introduction et contexte historique

En 1676, Newton a envoyé deux lettres nommées *Epistola prior* et *Epistola posterior* à Leibniz dans lesquelles il affirme avoir trouvé une toute nouvelle façon d'écrire les puissances. Leibniz utilisera les concepts découverts par Newton et emploiera dans ses travaux l'exposant « variable » (que l'on retrouve par exemple dans 10^x). Ces concepts reposent sur une nouvelle fonction que l'on va étudier dans ce chapitre.

On suppose qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1$$

1. En étudiant la fonction j définie, pour tout x réel, par $j(x) = f(x) \times f(-x)$ sur $\mathbb{R}$, montrer que

$$f(x) \times f(-x) = 1$$

Indication : une fonction est constante si et seulement si sa dérivée est nulle¹

2. Dédurre de la question précédente que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$$

3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

4. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{f(x+b)}{f(b)}$$

où b est un réel.

- (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = g(x)$.
- (b) Montrer que $g(0) = 1$
- (c) En déduire que $g = f$
- (d) Montrer que $f(x) \times f(b) = f(x+b)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (e) Conclure que, si $a \in \mathbb{R}$, alors

$$f(a+b) = f(a) \times f(b)$$

1. Rappel : si a et b sont deux réels et u une fonction dérivable, alors $u'(ax+b) = a \times u'(x)$

5. En utilisant le fait que $a+b = a+(-b)$, montrer que $f(a-b) = \frac{f(a)}{f(b)}$.

6. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$f(na) = (f(a))^n$$

7. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

- (b) En déduire que f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
- (c) Conclure que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

8. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

9. Montrer que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = x + 1$$

10. Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = f(x) - x - 1$$

- (a) Dresser le tableau de variations de la fonction h , et montrer qu'elle admet un minimum en 0
- (b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq x + 1$

11. En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$.

2. Théorème et définition

■ THÉORÈME :

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

■ DÉFINITION :

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et est notée $\exp$. Ainsi :

- $\exp(0) = 1$
- pour tout réel x , $\exp'(x) = \exp(x)$.

Démonstration. • L'existence est admise.

- Montrons l'unicité : soit g une éventuelle autre fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\begin{cases} g' = g \\ g(0) = 1 \end{cases}$. Montrons que $g = \exp$.

On a démontré dans la question 2 de l'activité introductive que la fonction $\exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: ceci autorise à définir la fonction k

Soit f une fonction qui est sa propre dérivée et qui vérifie $f(0) = 1$. On note

- i) $f' = f$.
- ii) $f(0) = 1$.

1. En étudiant la fonction j définie, pour tout x réel, par $j(x) = f(x) \times f(-x)$ sur $\mathbb{R}$, montrer que

$$f(x) \times f(-x) = 1$$

Indication : une fonction est constante si sa dérivée est nulle.

Démonstration. Soit j la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = f(x) f(-x)$.
Montrons que j est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

j est le produit de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$, donc j est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On considère $u : x \mapsto f(x)$ et $v : x \mapsto f(-x)$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
Ainsi $u' : x \mapsto f(x)$ et $v' : x \mapsto -f(-x)$ par dérivée de fonctions composées.
 j est de la forme uv , donc j' est de la forme $u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}, j'(x) &= f(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f(-x)) \\ &= f(x) f(-x) - f(x) f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $j'(x) = 0$.

Ainsi la fonction j est une fonction constante.

Or, on sait que $f(0) = 1$, donc $j(0) = f(0) \times f(0) = 1 \times 1 = 1$.

On en conclut que pour tout x réel, $j(x) = 1$.

Donc $f(x) f(-x) = 1$. □

2. Dédurre de la question précédente que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et montrons que, pour tout x réel, $f(x) \neq 0$.
On suppose qu'il existe réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

Alors, $f(x_0) \times f(-x_0) = 0 \times f(-x_0) = 0$.

Or, pour tout x réel, $f(x) f(-x) = 1$.

Il y a donc contradiction.

On en conclut que, pour tout x réel, $f(x) \neq 0$. □

3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

Démonstration. D'après 1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) f(-x) = 1$.

Or, d'après 2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

$$\text{D'où } f(-x) = \frac{1}{f(x)}. \quad \square$$

4. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{f(x+b)}{f(b)}$, où b est un réel.

(a) Montrer que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = g(x)$.

Démonstration. On a $g(x) = \frac{1}{f(b)} \times u(ax+b)$, avec $u = f$ et $a = 1$.

On a $g(x) = kf(x+b)$, avec $k = \frac{1}{f(b)}$, donc $g'(x) = kf'(x+b)$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) &= \frac{1}{f(b)} \times f'(x+b) \\ &= \frac{f'(x+b)}{f(b)} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

D'où le résultat attendu. □

(b) Montrer que $g(0) = 1$.

Démonstration. On a $g(0) = \frac{f(0+b)}{f(b)} = \frac{f(b)}{f(b)} = 1$. □

(c) En déduire que $g = f$.

Démonstration. D'après les questions 4.a) et 4.b), g vérifie $\begin{cases} g' = g \\ g(0) = 1 \end{cases}$.

Donc, par définition de f , g est la fonction f . □

(d) Montrer que $f(x) \times f(b) = f(x+b)$ pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. D'après la question 4.c), $g = f$, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f(x+b)}{f(b)}, \text{ i.e. } f(x) \times f(b) = f(x+b). \quad \square$$

(e) Conclure que, si $a \in \mathbb{R}$, alors $f(a+b) = f(a) \times f(b)$.

Démonstration. D'après la question 4.d), la relation $f(x) \times f(b) = f(x+b)$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, si $a \in \mathbb{R}$, elle est vraie en particulier pour $x = a$.

Ainsi on obtient $f(a) \times f(b) = f(a+b)$. □

5. En utilisant le fait que $a+b = a+(-b)$, montrer que $f(a-b) = \frac{f(a)}{f(b)}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a-b) &= f(a+(-b)) \\ &= f(a) \times f(-b), \text{ d'après 4.e).} \\ &= f(a) \times \frac{1}{f(b)}, \text{ d'après 3).} \\ &= \frac{f(a)}{f(b)} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a-b) = \frac{f(a)}{f(b)}. \quad \square$$

6. Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel a , $f(na) = (f(a))^n$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$. Notons P_n la propriété : $f(na) = f(a)^n$, où n est un entier naturel. Montrons que cette propriété est vraie par récurrence sur $\mathbb{N}$:

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $f(na) = f(0) = 1$ et $f(a)^n = f(a)^0 = 1$. On note que, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $f(a) \neq 0$, donc que $f(a)^0$ est bien définie. Ainsi la propriété est initialisée pour $n = 0$.
- Hérédité : supposons que $f(na) = (f(a))^n$ pour un certain entier n . Alors

$$\begin{aligned} f((n+1)a) &= f(na + a) \\ &= f(na) \times f(a) \\ &= (f(a))^n \times f(a) \\ &= (f(a))^{n+1} \end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire.

- Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(na) = (f(a))^n$$

□

7. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

Démonstration. D'après la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2} \times 2\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

□

(b) En déduire que f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. D'après la question 6., on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

Un carré est toujours positif, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

□

(c) Conclure que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. D'après la question 7.b), on a $f(x) \geq 0$.

De plus, d'après la propriété iii), on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.

□

8. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. D'après i), on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$.

Or, d'après la propriété 7.c) : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.

Ainsi $f'(x) > 0$, et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

□

9. Montrer que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$.

Démonstration. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Ici, on se place en $a = 0$, d'où : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, i.e. $y = f(0)x + f(0)$.

Or, d'après la définition de f , on a $f(0) = 1$, et donc $y = 1(x - 0) + 1$, i.e. $y = x + 1$. □

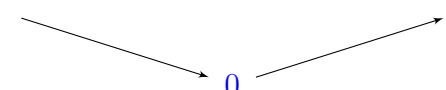
10. Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x - 1$.

(a) Dresser le tableau de variation de la fonction h , et montrer que la fonction admet un minimum en 0.

Démonstration. h est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f'(x) - 1$. D'après i), $f' = f$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f(x) - 1$.

On a ainsi le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$			

On a que $h'(0) = 0$ et $\begin{cases} \text{si } x \in]-\infty; 0], h'(x) < 0 \\ \text{si } x \in]0; +\infty[, h'(x) > 0 \end{cases}$.

Donc 0 est bien un minimum de h sur l'intervalle $]-\infty; +\infty[$. □

(b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq x + 1$.

Démonstration. D'après la question 7.b), $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0 \iff f(x) - x - 1 \geq 0$
 $\iff f(x) \geq x + 1$.

D'où le résultat attendu. □

11. En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$.

Indication : on peut remplacer x par h pour s'aider, et remarquer que $x = 0 + x$.

Démonstration. On remplace x par h (h étant présent dans la définition du nombre dérivé).

On considère le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0.

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(h) - 1}{h} \\ &= \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}\end{aligned}$$

On a $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h}$.

Or, par définition du nombre dérivé, $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = f'(0)$.

On sait que $f'(x) = f(x)$ d'après puisque $f(x) = 1$ pour $x = 0$ d'après la définition. Donc $f'(0) = 1$.

On en conclut que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} = 1$.

□