

Révision pour le DS – bijection & exponentielle

EXERCICE

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[-5 ; 5]$ par $g(x) = e^x + x + 1$.

- 1) Étudier les variations de g sur $[-5 ; 5]$ et dresser son tableau de variation.
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α sur $[-5 ; 5]$ et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
- 3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[-5 ; 5]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[-5 ; 5]$ par $f(x) = \frac{x e^x}{e^x + 1}$ et C sa courbe dans un repère orthogonal du plan.

- 1) Montrer que pour tout réel x de $[-5 ; 5]$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$.
- 2) En déduire les variations de f .
- 3) a) Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
b) Déterminer le signe de $h(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ pour tout x de $[-5 ; 5]$.
c) Donner la position relative de C et T .

CORRECTION : EXERCICE 4

Partie A : 1) La fonction g définie sur $[-5 ; 5]$ par $g(x) = e^x + x + 1$ est une somme de fonctions dérivables sur $[-5 ; 5]$ donc elle est dérivable sur $[-5 ; 5]$ et, pour tout x de $[-5 ; 5]$, $g'(x) = e^x + 1$.
Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc pour tout x de $[-5 ; 5]$, $g'(x) > 0$. On en déduit que g est strictement croissante sur $[-5 ; 5]$.

Tableau de variation	x	-5	5
	$g'(x)$	+	
	$g(x)$	$e^{-5} - 4$	$e^5 + 6$

- 2) Sur l'intervalle $[-5 ; 5]$, la fonction g est continue (comme somme de fonctions continues), strictement croissante, et de plus $e^{-5} - 4 \approx -4 < 0$ et $e^5 + 6 > 0$ (somme de réels strictement

positifs) donc $0 \in [g(-5); g(5)]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution α dans $[-5; 5]$.

$g(\alpha) = 0$, $g(-1,28) \approx -0,02 < 0$ et $g(-1,27) \approx 0,01 > 0$; comme g est strictement croissante sur $[-5; 5]$, $\boxed{-1,28 < \alpha < -1,27}$.

- 3) $g(\alpha) = 0$ et g est strictement croissante sur $[-5; 5]$, donc pour tout réel x de $[-5; \alpha]$, $g(x) < 0$ et pour tout réel x de $[\alpha; 5]$, $g(x) > 0$.

Partie B : 1) f est la fonction définie sur $[-5; 5]$ par $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$; posons $u(x) = xe^x$ et

$v(x) = e^x + 1$. La fonction u est un produit de fonctions dérivables sur $[-5; 5]$ donc elle est dérivable sur $[-5; 5]$ et la fonction v est aussi dérivable sur $[-5; 5]$ et ne s'annule pas donc leur quotient $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur

$[-5; 5]$. Pour tout x de $[-5; 5]$, $u'(x) = 1 \times e^x + xe^x = e^x + 1$ et $v'(x) = e^x$ d'où

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)e^x(1 + x) - xe^x(e^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + 1 + xe^x + x - xe^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + 1 + x)}{(e^x + 1)^2};$$

On en déduit : pour tout x de $[-5; 5]$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

- 2) Pour tout x de $[-5; 5]$, $e^x > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. On en déduit que $f'(x)$ s'annule en α , que pour tout réel x de $[-5; \alpha]$, $f'(x) < 0$ et que pour tout réel x de $[\alpha; 5]$, $f'(x) > 0$. Donc f est strictement décroissante sur $[-5; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; 5]$.

- 3) a) $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{g(0)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ donc une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0), \text{ c'est-à-dire : } \boxed{y = \frac{1}{2}x}.$$

- b) Pour tout x de $[-5; 5]$, $h(x) = f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{xe^x}{e^x + 1} - \frac{x}{2} = \frac{2xe^x - xe^x - x}{2(e^x + 1)} = \frac{xe^x - x}{2(e^x + 1)} = \frac{x(e^x - 1)}{2(e^x + 1)}$.

Pour tout x de $[-5; 5]$, $e^x + 1 > 0$ donc $h(x)$ est du signe de $x(e^x - 1)$ qui est le produit de deux facteurs.

Étudions le signe de $e^x - 1$: $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$. D'où le tableau de signes :

x	-5	0	5
x	-	0	+
$e^x - 1$	-	0	+
$h(x)$	+	0	+

- c) Sur $[-5; 0[$ et sur $]0; 5]$, $h(x) > 0$ donc la courbe C est au-dessus de la tangente T et le point d'abscisse 0 est le point de contact entre C et T .