

EXERCICE 3

Fonction

- 1) Soit la fonction f définie sur $[-2; 1]$ par : $f(x) = (1 - 2x)e^x$.
 - a) Déterminer et factoriser $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f .
 - b) Résoudre $f'(x) = 0$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[-2; 1]$.
Préciser les valeurs exactes des bornes et des extremums éventuels.
 - c) L'équation $f(x) = 2$ admet-elle des solutions ? Justifier.
- 2) Soit la fonction g définie sur $[-2; 4]$ par : $g(x) = x^2 e^{-x}$
 - a) Déterminer et factoriser $g'(x)$ où g' est la fonction dérivée de g .
 - b) Résoudre $g'(x) = 0$ puis dresser le tableau de variations de g sur $[-2; 4]$.

EXERCICE 4

Injection d'un produit chez un sportif

On procède, chez un sportif, à l'injection intramusculaire d'un produit. Celui-ci se diffuse progressivement dans le sang. On admet que la concentration de ce produit dans le sang (exprimée en mg/L) peut être modélisée par la fonction f , définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par : $f(t) = \frac{6t}{e^t}$ où t est le temps exprimé en heure.

- 1) Montrer que pour tout $t \in [0; 10]$, la fonction dérivée f' a pour expression :

$$f'(t) = \frac{6 - 6t}{e^t}$$

- 2) Résoudre $f'(t) = 0$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0; 10]$.
- 3) Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? (on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-1} près). Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?
- 4) Ce produit fait l'objet d'une réglementation par la fédération sportive : un sportif est en infraction si, au moment du contrôle, la concentration dans son sang du produit est supérieure à 2 mg/L.

Le sportif peut-il être contrôlé à tout moment après son injection ? Expliquer votre raisonnement en vous basant sur l'étude de la fonction f .

Correction des exercices de révisions

31 mars 2025

EXERCICE 1

QCM

- 1) **Réponse a :** $\frac{(e^{2x})^2}{e^{3x+1}e^{-x-1}} = \frac{e^{4x}}{e^{3x+1-x-1}} = \frac{e^{4x}}{e^{2x}} = e^{2x}.$
- 2) **Réponse d :** $2 + \frac{3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1} = \frac{5e^{-x} - 3}{e^{-x} + 1} \times e^x = \frac{5 - 3e^x}{1 + e^x}$
- 3) **Réponse c :** On passe de l'expression de gauche à celle de droite en divisant par e^x qui doit donc être positif.
- 4) **Réponse b :** $k'(x) = -2e^{-2x} < 0$ et $g'(x) = -e^{-x} < 0$, les fonctions k et g sont décroissantes, elles correspondent aux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. De plus $k'(x) < g'(x)$ donc la fonction k décroît plus vite que g et donc la courbe représentant k est la courbe $\mathcal{C}_2$.
- 5) **Réponse b :** $f'(x) = 1e^x + xe^x = (1+x)e^x \Rightarrow f'(1) = 2e$ et $f(1) = e$.
L'équation de la tangente en 1 est :
$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 2e(x-1) + e \Leftrightarrow y = 2ex - e$$

EXERCICE 2

Équations et inéquations

- 1) a) $e^{5-x^2} = e^{\text{exp monotone}} \Leftrightarrow 5 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2 \Leftrightarrow S = \{-2; 2\}$
- b) On pose $X = e^x$ avec $X > 0$, l'équation devient : $X^2 + 2X - 3 = 0$.
 $X_1 = 1$ racine évidente, $P = -3$ $X_2 = -3 < 0$ (non retenu).
On revient à x : $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, d'où $S = \{0\}$.
- 2) a) $e^{2x} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{2x} < e^0 \xrightarrow{\text{exp} \nearrow} 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow S =]-\infty; 0[.$
- b) $e^{2x} - e^{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geq e^{x+1} \xrightarrow{\text{exp} \nearrow} 2x \geq x+1 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow S = [1; +\infty[.$

EXERCICE 3

Fonction

- 1) a) $f'(x) = -2e^x + (1-2x)e^x = e^x(-2+1-2x) = (-2x-1)e^x.$
- b) $f'(x) = 0 \xrightarrow{e^x \neq 0} -2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ et $\text{signe } f'(x) \xrightarrow{\text{exp} \nearrow} \text{signe } (-2x-1).$

x	-2	$-\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$5e^{-2}$	$2e^{-\frac{1}{2}}$	$-e$

c) On a $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{1}{2}} \approx 1,21$.

D'après le tableau de variation, $\forall x \in [-2; 1]$, $f(x) < 0$, donc l'équation $f(x) = 2$ n'admet pas de solution.

2) a) $g'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = x(2 - x)e^{-x}$.

b) $g'(x) = 0 \stackrel{e^{-x} \neq 0}{\Leftrightarrow} x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ et } \text{signe } g'(x) \stackrel{\text{exp}}{\nearrow} \text{signe } x(2 - x)$.

x	-2	0	2	4	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$4e^2$ $\searrow$ 0 $\nearrow$ $4e^{-2}$ $\searrow$ $16e^{-4}$				

EXERCICE 4

Injection d'un produit chez un sportif

1) $f'(t) = \frac{6e^t - 6te^t}{(e^t)^2} = \frac{e^t(6 - 6t)}{(e^t)^2} \stackrel{\div e^t}{=} \frac{6 - 6t}{e^t}$.

2) $f'(t) = 0 \stackrel{e^t \neq 0}{\Leftrightarrow} 6 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ et } \text{signe } f'(t) \stackrel{\text{exp}}{\nearrow} \text{signe } 6 - 6t$.

t	0	1	10
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$0 \nearrow 6e^{-1} \searrow 60e^{-10}$		

3) La concentration maximale est donnée par : $f(1) = 6e^{-1} \approx 2,2 \text{ mg/L}$ à 10^{-1} près.
Cette valeur est atteinte au bout d'une heure.

4) Le sportif ne peut pas être contrôlé à tout moment après son injection car le maximum de la concentration est de $2,2 \text{ mg/L}$. À l'aide d'un tableau de valeur, avec un balayage de $0,01$, on trouve pour $t \in [0,62; 1,51]$ une concentration supérieure à 2 mg/L .