

Contrôle de Mathématiques n°5 (H6-H7)
L'usage de la calculatrice est autorisé.
Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction.

Exercice 1 : Homothétie (0.5+0.75+0.5+0.75+1+0.75+0.75 = 5 points)

Soit ABC un triangle, M le point défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N ; la parallèle à (AB) passant par N coupe la parallèle à (AC) passant par M en I ; la parallèle à (AB) passant par C coupe la parallèle à (AC) passant par B en J .

On note h l'homothétie de centre A et de rapport 3.

- 1) a) Démontrer que B est l'image de M par h .
- b) Déterminer l'image de (MN) par h .
- c) En déduire l'image de N par h .
- 2) Déterminer l'image de la droite (MI) par h .
- 3) Démontrer que $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AI}$.
- 4) Soit O et P les milieux respectifs de $[MN]$ et de $[BC]$.
- a) Démontrer que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AO}$.
- b) Démontrer soigneusement que les points A, O, I, P et J sont alignés.

Exercice 2 : Homothétie, lieu géométrique (0.75+0.75+1+1+1.25+1.25+0.5 = 6.5 points)

- 1) ABC un triangle rectangle en B .

On considère le point G défini par $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. [1]

- a) Montrer que l'égalité [1] équivaut à $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AB})$.
- b) Construire le point G sur la figure jointe à l'énoncé.
- 2) On considère la transformation h du plan qui, à tout point M , associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \quad [2]$$

- a) Montrer que l'égalité [2] équivaut à $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MG}$.
- b) En déduire que h est une homothétie de centre G dont on précisera le rapport.
- 3) N est un point mobile qui décrit la droite (AB) .
 Déterminer le lieu géométrique L_N de $N' = h(N)$ en justifiant. Le construire sur la figure.
- 4) P est un point du cercle de diamètre $[BC]$.
 Déterminer le lieu géométrique L_P de $P' = h(P)$ en justifiant. Le construire sur la figure.
- 5) Démontrer que L_N est tangente à L_P .

Correction de l'exercice 1 :

Ex. 1: h est l'homothétie de centre A et de rayon 3

1a) $\vec{AN} = \frac{1}{3} \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AB} = 3\vec{AN} \Leftrightarrow B = h(M)$

b) (MN) passe par N donc $h((MN))$ est la droite parallèle à (MN) passant par $h(N) = B$. On a donc $h((MN)) = (BC)$

c) A, N et $h(N)$ sont alignés donc $h(N) \in (AC)$ car $(AN) = (AC)$
 $N \in (MN)$ donc $h(N) \in h((MN)) \Leftrightarrow h(N) \in (BC)$
 Ainsi $h(N) = (AC) \cap (BC) = C$ L'image de N par h est C .

2) (Π) passe par N donc $h((\Pi))$ est la droite parallèle à (Π) passant par $B = h(N)$. Or $(\Pi) \parallel (AC)$ et $(BJ) \parallel (AC)$
 D'où $h((\Pi)) = (BJ)$.

3) On montre de même que $h((NI)) = (CJ)$.
 Or $I = (MI) \cap (NI)$ donc $h(I) = (BJ) \cap (CJ) = J$
 On en conclut que $\vec{AJ} = 3\vec{AI}$.

4) L'homothétie conserve les milieux car elle conserve l'alignement et les rapports de longueurs) donc $h(O) = P$
 puisque O est le milieu de $[MN]$ et que $h([MN]) = [BC]$.
 D'où $\vec{AP} = 3\vec{AO}$.

D'après 3) A, I et J sont alignés
 D'après 4) A, P et O sont alignés
 De plus A, O et I sont alignés car $AMIN$ est un $\triangle$ de centre O
 Conclusion: A, O, I, P et J sont alignés

Correction de l'exercice 2 :

Exercice 2:

1) a) $\vec{GA} + 3\vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \vec{GA} + 3\vec{GA} + 3\vec{AB} - \vec{GA} - \vec{AC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 3\vec{GA} + 3\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 3\vec{AG} = \vec{CA} + 3\vec{AB} = \vec{CB} + 2\vec{AB}$
 $\Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{CB} + 2\vec{AB})$ on a bien l'équivalence demandée

b) voir figure

2) a) Soit Π un point du plan et Π' son image par h , on a:
 $\vec{M\Pi'} = \vec{MA} + 3\vec{MB} - \vec{MC}$
 $\Leftrightarrow \vec{M\Pi'} = \vec{MG} + \vec{GA} + 3\vec{MG} + 3\vec{GB} - \vec{MG} - \vec{GC}$
 $\Leftrightarrow \vec{M\Pi'} = 3\vec{MG} + \underbrace{\vec{GA} + 3\vec{GB} - \vec{GC}}_{\vec{0}}$
 $\Leftrightarrow \vec{M\Pi'} = 3\vec{MG}$ on a bien l'équivalence demandée

b) Soit M un point quelconque du plan on a:
 $\vec{M\Pi'} = 3\vec{MG} \Leftrightarrow \vec{MG} + \vec{GM'} = 3\vec{MG}$
 $\Leftrightarrow \vec{GM'} = 2\vec{MG}$
 $\Leftrightarrow \vec{GM'} = -2\vec{GM}$
 h est donc l'homothétie de centre G et de rapport -2

3) N décrit (AB) et h est une transformation bijective
 donc $h(N)$ décrit $h((AB)) = (A'B')$ avec $\vec{GA'} = -2\vec{GA}$ (ou $A' = h(A)$)
 et $\vec{GB'} = -2\vec{GB}$

$L_N = (A'B')$ est une droite parallèle à (AB) .

4) P décrit le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[BC]$ donc $h(P)$ décrit $L_P = h(\mathcal{C})$ qui est le cercle de diamètre $[B'C']$ avec $B' = h(B)$ et $C' = h(C)$

5) Par construction du triangle $A'B'C'$ sur $(\mathcal{C})$, (AB) est tangente au cercle $\mathcal{C}$. L'homothétie conserve les angles dans $(A'B') \perp (B'C')$ et $[B'C']$ est un diamètre de $L_P = h(\mathcal{C})$ donc $(A'B')$ est tangente à L_P .
 L_N est tangente à L_P .