

Devoir Surveillé n°3

Correction

TS

Fonctions et continuité

Durée 2 heures - Coeff. 10

Noté sur 20 points

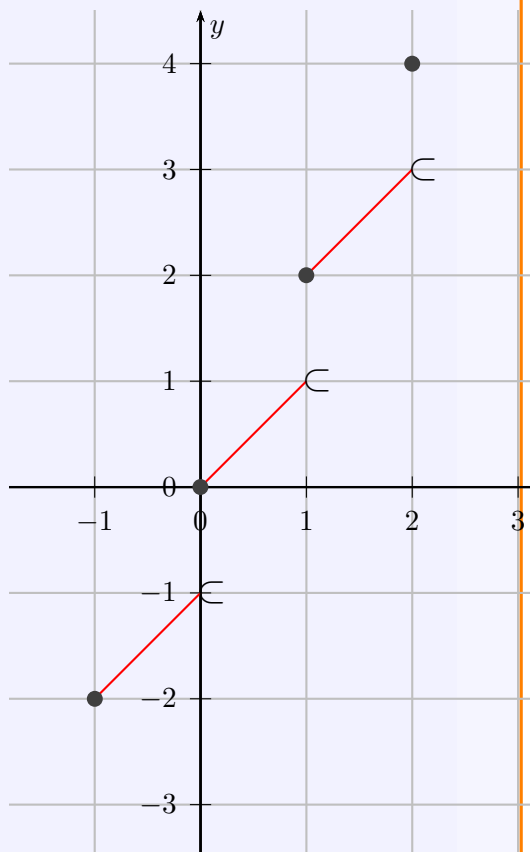
ANNEXES à rendre avec la copie

A compléter sur cette feuille

ANNEXE 1 de l'exercice 2.



Corrigé



A compléter sur cette feuille

ANNEXE 2 de l'exercice 4.

L'algorithme permet d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} , où α est la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a ; b]$ (à préciser).



Pseudo Code

$[a ; b]$ un intervalle de départ qui contient la solution α avec $a < b$.

$a \leftarrow -10$

$b \leftarrow 10$

Tant que $(b - a > 0,01)$ Faire

$m \leftarrow \frac{a + b}{2}$

Si $f(a) \times f(m) < 0$ Alors

$b \leftarrow m$

Sinon

$a \leftarrow m$

Fin Tant que

Afficher (a, b)

Exercice 2. Avec la fonction partie entière**3 points**

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x , c'est à dire l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$.

Soit f la fonction définie sur $[-1 ; 2]$ par :

$$f(x) = x + \lfloor x \rfloor$$

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x suivant les valeurs du réel x de $[-1 ; 2]$.

**Corrigé**

- Pour x de $[-1 ; 0[$ on a $\lfloor x \rfloor = -1$ et donc $f(x) = x - 1$.
- Pour x de $[0 ; 1[$ on a $\lfloor x \rfloor = 0$ et donc $f(x) = x$.
- Pour x de $[1 ; 2[$ on a $\lfloor x \rfloor = 1$ et donc $f(x) = x + 1$.
- Pour $x = 2$ on a $\lfloor 2 \rfloor = 2$ et donc $f(2) = 2 + 2 = 4$.

2. Construire la représentation graphique de f dans le repère de l'ANNEXE 1 et sans autre justification. Attention au codage !
3. f est-elle continue sur $[0 ; 1[$? sur $[1 ; 2]$? Justifier la réponse graphiquement.

**Corrigé**

- Sur $[1 ; 2]$.
La fonction f est définie par une fonction affine sur $[1 ; 2[$ donc elle y est continue. Le problème se pose en 2. L'image de 2 par f est 4 or quand x tend vers 2 par valeurs inférieures, f tend vers 3, il y a discontinuité. La courbe représentative présente bien un saut en 2 donc la fonction n'est pas continue sur $[1 ; 2]$.
- Par contre elle est continue sur $[0 ; 1[$ car sur cet intervalle la fonction s'exprime sous la forme d'une fonction affine, la courbe n'y présente pas de saut.

Exercice 3. Vrai ou Faux**4 points**

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier avec soin votre raisonnement. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ telle que :

- la fonction g est dérivable et strictement décroissante sur $[0 ; 1]$;
- On a : $g(0) = 5$ et $g(1) = 2$.

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = (g(x))^2$$

Alors l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution sur $[0 ; 1]$.



Corrigé

- f dérivable sur $[0 ; 1]$.

La fonction g est définie et dérivable sur $[0 ; 1]$ donc f l'est aussi d'après le cours car de la forme g^2 . Pour x de $[0 ; 1]$ on a :

$$f'(x) = 2g(x) \times g'(x)$$

- g positive sur $[0 ; 1]$.

La fonction g est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$ (et continue car dérivable) donc elle admet comme minimum $g(1) = 2$ et on obtient :

x	0	1
Signe de $g'(x)$	—	
Variations de g	5 ↘ 2	

De ce fait g est strictement positive sur $[0 ; 1]$ et donc f' est du signe de g' .

- Variations de f sur $[0 ; 1]$.

Puisque g est décroissante, g' est strictement négative ce qui nous donne le signe de f' et donc les variations de f qui est aussi décroissante sur $[0 ; 1]$:

x	0	1
Signe de $f'(x) = 2g(x) \times g'(x)$	—	
Variations de f	$f(0) = g(0)^2 = 25$ ↘ $f(1) = g(1)^2 = 4$	

- f continue sur $[0 ; 1]$.

Pour appliquer le TVI, il reste à montrer que f est continue. Cela est acquis car on a montré que f était dérivable sur $[0 ; 1]$.

- On peut appliquer le corolaire du TVI :

- Sur $[0 ; 1]$ f est continue.
- le réel $k = 6$ est compris entre $f(0) = g(0)^2 = 25$ et $f(1) = g(1)^2 = 4$.
- Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution sur $[0 ; 1]$.

- **Conclusion : l'affirmation 1 est vraie.**

Affirmation 2

Soit m un réel et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = -x^2 + m & \text{si } x \leq 3 \\ h(x) = -2x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La fonction h n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, quelle que soit la valeur de m .



Corrigé

- Sur l'intervalle $] -\infty ; 3]$ la fonction h est continue car c'est une fonction polynôme du second degré. Sur l'intervalle $]3 ; +\infty[$ la fonction h est continue car c'est une fonction affine. Le problème se pose donc en 3.
- On a $h(3) = -3^2 + m = m - 9$.
- Par ailleurs, si x tend vers 3 en étant supérieur à 3, $h(x)$ tend vers $-2 \times 3 - 1 = -7$.
- En prenant $m = 2$ on aura donc la continuité en 3 et la fonction, sera continue sur $\mathbb{R}$.
- **Conclusion :** l'affirmation 2 est fausse.

Partie A : une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + 3x + 8$$

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.



Corrigé

La fonction g est une fonction polynôme donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$g'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$$

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$ on a trivialement $3(x^2 + 1) > 0$ et donc g' est strictement positive et g strictement croissante sur cet intervalle.

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.



Corrigé

x	$-\infty$	-2	α	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$			+		
Variations de g		-6	0	8	

- Sur $]-\infty ; -2]$: g est strictement croissante et de maximum $g(-2) = -6$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'y admet pas de solution.
- Sur $[0 ; +\infty[$: g est strictement croissante et de maximum $g(0) = 8$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'y admet pas de solution.
- Sur $[-2 ; 0]$:
 - g est strictement croissante et continue (car dérivable);
 - le réel $k = 0$ est compris entre $g(-2) = -6$ et $g(0) = 8$ donc l'équation $g(x) = 0$;
 - Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ y admet une unique solution α .
- Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et $-2 < \alpha < 0$.

3. Compléter l'algorithme de dichotomie donné en ANNEXE 2 qui permet d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} . On partira d'un intervalle $[a ; b]$ contenant α , avec a et b entier.
4. En le justifiant avec soin, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .



Corrigé

$$\begin{cases} g(-1,52) \approx -0,075 < 0 \\ g(-1,51) \approx 0,027 > 0 \end{cases} \implies \boxed{-1,52 < \alpha < -1,51}$$

5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .



Corrigé

d'après le tableau de variation de la question A.2. on obtient :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$-$	0	$+$

Partie B : étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$$

1. Démontrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.



Corrigé

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$ on a :

$$x^2 \geq 0 \implies x^2 + 1 > 0 \implies x^2 + 1 \neq 0$$

De ce fait, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer la dérivée de f et vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$$



Corrigé

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x de $\mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \frac{3x^2 \times (x^2 + 1) - (x^3 - 4) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 + 8x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

3. Étudier les variations de f . On pourra utiliser les résultats de la partie A.



Corrigé

Sur $\mathbb{R}$ le dénominateur $(x^2 + 1)^2$ est strictement positif donc g' est du signe de $xg(x)$.

D'après l'étude menée dans la partie A on obtient alors :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
Signe de x				
Signe de $g(x)$				
Signe de $xg(x)$				

Soit

x	$-\infty$	$-1.52 < \alpha < -1.51$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$				
Variations de f				

4. Démontrer que :

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{3}{2}$$



Corrigé

Puisque $g(\alpha) = 0$ on a :

$$\alpha^3 = -3\alpha - 8$$

De ce fait on remplaçant dans $f(\alpha)$ on a :

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{\alpha^3 - 4}{\alpha^3 + \alpha} = \frac{-3\alpha - 8 - 4}{-3\alpha - 8 + \alpha} = \frac{-3\alpha - 12}{-2\alpha - 8} = \frac{-3(\alpha + 4)}{-2(\alpha + 4)} = \frac{3}{2}$$

5. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.



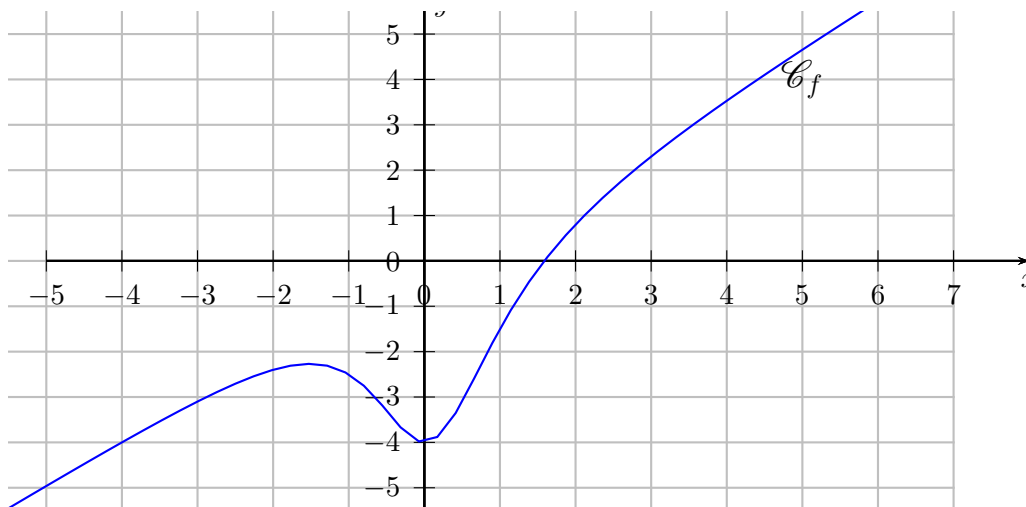
Corrigé

Donc puisque d'après la partie A on a et la question précédente :

$$\begin{cases} f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha \\ -1,52 < \alpha < -1,51 \end{cases} \Rightarrow \boxed{-2,280 < f(\alpha) < -2,265}$$

Partie C : un problème de tangente

On donne ici $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .



1. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Corrigé

L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a = 0$ est

$$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\begin{cases} f(0) = -4 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow (T) : y = 0 \times (x - 0) - 4 \Rightarrow \boxed{y = -4}$$

2. Conjecturer graphiquement la position relative de (T) par rapport à $\mathcal{C}_f$.
Valider votre conjecture par le calcul.



Corrigé

Pour étudier la position de la tangente par rapport à $\mathcal{C}_f$ il faut étudier le signe de la différence :

$$\begin{aligned} f(x) - (-4) &= \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} + 4 \\ &= \frac{x^3 - 4 + 4x^2 + 4}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2(x + 4)}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}$ le dénominateur $(x^2 + 1)$ est strictement positif et x^2 est positif et nul en 0. Donc la différence est du signe du facteur $(x + 4)$ et :

• Or :

$$\begin{cases} x + 4 = 0 \iff x = -4 \\ x - 4 > 0 \iff x > 4 \end{cases} \implies x + 4 < 0 \iff x < -4$$

Donc :

- Si $x < -4$, alors $f(x) - (-4) < 0$ et $\mathcal{C}_f$ au dessous de T ;
- Si $x \geq -4$, alors $f(x) - (-4) \geq 0$ et $\mathcal{C}_f$ au dessus de T ;
- La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe T en deux points d'abscisses (-4) et 0 .

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
signe de $f(x) - (-4) =$ $\frac{x^2(x+4)}{x^2+1}$	-	0	+	+
Position	$\mathcal{C}_f$ au dessous de (T)		$\mathcal{C}_f$ au dessus de (T)	

↩ **Fin du devoir** ↪