

Séquence IX – Transformations affines

Exercice 1

10 d est la droite d'équation $2x - y + 3 = 0$. Elle coupe l'axe des ordonnées en A . On note h l'homothétie de centre O et de rapport -2 .

1. Trouvez les coordonnées de $A' = h(A)$.
2. Déduisez-en une équation de la droite d' image de la droite d par h .

Solution de l'exercice 1

On considère la droite d d'équation $2x - y + 3 = 0$.

Rappel : On sait que M a comme coordonnées $(x; y)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ si et seulement si $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, c'est-à-dire $\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1. On sait que $A' = h(A)$, donc $\vec{OA'} = -2\vec{OA}$.
 A est le point d'intersection entre d et l'axe des ordonnées, donc $A(0; 3)$. Ainsi $\vec{OA} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et donc $\vec{OA'} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$. D'où $A'(0; -6)$.
2. On sait que $d' = h(d)$. De plus, l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.
Donc d' est parallèle à d , et d' passe par A' d'après la question 1.
Ainsi d' a une équation de la forme

$$2x - y + c = 0$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

$A \in d'$, donc $2 \times 0 + 6 + c = 0$, i.e. $c = -6$.

Ainsi

$$d' : 2x - y - 6 = 0$$

Exercice 2

11 Deux droites d et d' ont pour équations respectives $x - y + 3 = 0$ et $x - y - 2 = 0$ et coupent respectivement l'axe des ordonnées en A et B .

1. Vérifiez que d et d' sont parallèles et trouvez les coordonnées de A et B .
2. h est l'homothétie de centre O telle que $h(A) = B$.
 - a) Pourquoi d' est-elle l'image de d par h ?
 - b) Quel est le rapport de cette homothétie ?

Solution de l'exercice 2

1. d et d' ont même vecteur directeur (à savoir $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$). Ainsi d et d' sont parallèles.

On cherche les coordonnées des points d'intersection avec l'axe des ordonnées, c'est-à-dire pour $x = 0$.

- Pour $x = 0$ dans l'équation de d , on obtient

$$-y + 3 = 0$$

c'est-à-dire $y = 3$.

- Pour $x = 0$ dans l'équation de d' , on obtient

$$-y - 2 = 0$$

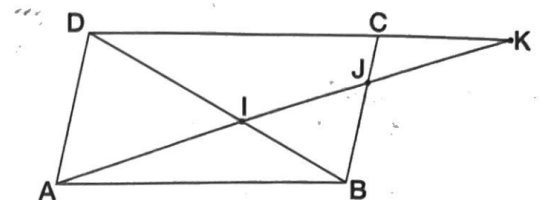
c'est-à-dire $y = -2$.

Ainsi $A(0; 3)$ et $B(0; -2)$.

2. (a) $h(A) = B$ et $A \in d$, et donc $B \in h(d)$.
Or, l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.
Donc $h(d)$ est la droite parallèle à d passant par B .
Or, $B \in d'$ et $B \in h(d)$.
Donc $h(d) = d'$.
(b) D'après les coordonnées des points A et B , $\vec{OA} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{OB} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Donc $\vec{OB} = -\frac{2}{3}\vec{OA}$.
Ainsi le rapport de l'homothétie est $-\frac{2}{3}$.

Exercice 3

14 $ABCD$ est un parallélogramme. On note h l'homothétie de centre I qui transforme B en D .



1. a) Pourquoi le théorème 2 vous permet-il d'affirmer que l'image de (AB) est la droite (DC) ?
b) Déduisez-en que $h(A) = K$.
Aide : Voir l'exercice résolu 2, p. 387.
2. a) Quelle est l'image de la droite (BC) par h ?
b) Déduisez-en que $h(J) = A$.
3. On note k le rapport de l'homothétie h . Déduisez des questions précédentes que :
 $\vec{IA} = k\vec{IJ}$ et $\vec{IK} = k\vec{IA}$,
puis que $IA^2 = IJ \times IK$.

Solution de l'exercice 3

1. (a) D'après le théorème cité, l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle. Donc l'image de (AB) est une droite parallèle à (AB) .

On sait que $h(B) = D$, donc l'image de (AB) est la droite parallèle à (AB) passant par D . Or, $ABCD$ est un parallélogramme, donc (DC) est parallèle à (AB) .

On en conclut que l'image de (AB) par h est bien la droite (DC) .

- (b) On sait que l'image du point A est sur la droite (IA) . En effet, par une homothétie, un point, son image et le centre de cette homothétie sont alignés.

De plus, $h(A)$ appartient à l'image de (AB) , i.e. $h(A) \in (DC)$.

Ainsi, l'image de A est le point d'intersection entre (IA) et (DC) , c'est-à-dire le point K . Donc $K = h(A)$.

2. D'après le théorème 2, l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle. Donc l'image de (BC) est une droite parallèle à (BC) .

On sait que $h(B) = D$, donc l'image de (BC) est la droite parallèle à (BC) passant par D . Or, $ABCD$ est un parallélogramme, donc (DA) est parallèle à (BC) .

On en conclut que l'image de (BC) par h est bien la droite (DA) .

On sait que l'image du point J est sur la droite (IA) . En effet, par une homothétie, un point, son image et le centre de cette homothétie sont alignés.

De plus, $h(J)$ appartient à l'image de (BC) , i.e. $h(J) \in (DA)$.

Ainsi, l'image de J est le point d'intersection entre (IA) et (DA) , c'est-à-dire le point A . Donc $A = h(J)$.

- (3) On sait que $K = h(A)$ et $A = h(J)$, donc par définition de l'homothétie h de centre I et de rapport k :

$$\begin{cases} \overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IA} \\ \overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IJ} \end{cases}$$

Ainsi, en passant aux normes :

$$\begin{cases} IK = |k| IA (*) \\ IA = |k| IJ (**) \end{cases}$$

En multipliant chaque membre de $(*)$ par IA , on obtient

$$IK \times IA = |k| \times IA^2$$

et grâce à $(**)$

$$IK \times |k| IJ = |k| \times IA^2$$

Or, le rapport d'une homothétie est non nul, donc

$$IK \times IJ = IA^2$$

Exercice 4

18 Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ d'équations respectives $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$.

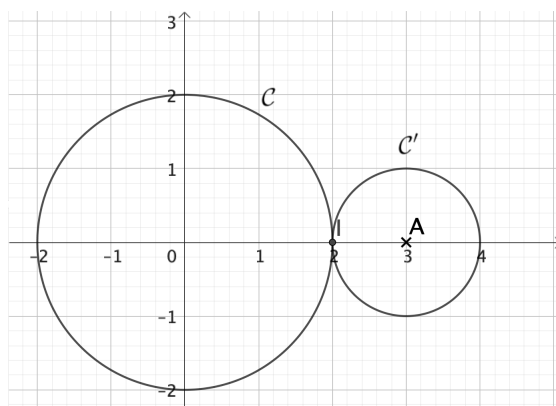
1. a) Construisez les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

b) Vérifiez que ces cercles sont tangents.

2. On note I le point de coordonnées $(2; 0)$.

Démontrez que $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par une homothétie h de centre I dont vous préciserez le rapport.

Solution de l'exercice 4



1. (a) Graphiquement, on remarque que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents en $I(2; 0)$. Pour le montrer, on résout le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases}$$

On remplace $x^2 + y^2$ dans la deuxième équation, et on obtient $4 - 6x + 8 = 0$, c'est-à-dire $x = 2$. Puis, on remplace dans la première équation (par exemple...), et on obtient $4 + y^2 = 4$, c'est-à-dire $y^2 = 0$, donc $y = 0$. Ainsi $I(2; 0)$ est l'unique point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Ainsi ces deux cercles sont bien tangents en I .

2. De l'équation $x^2 + y^2 = 4$, on sait que $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 2.

De l'équation $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$, c'est-à-dire $(x - 3)^2 + y^2 = 1$, on sait que $\mathcal{C}'$ est un cercle de centre $A(3; 0)$ et de rayon 1.

Notons h l'homothétie cherchée et k son rapport. On sait alors que $h(O) = A$, c'est-à-dire $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IO}$. Or, $\overrightarrow{IO} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc

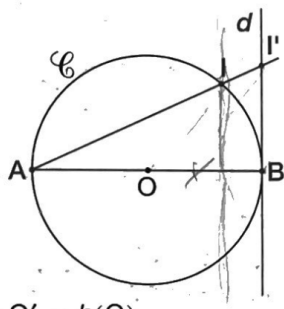
$$\vec{IA} = -\frac{1}{2}\vec{IO}.$$

Vérifions que le rapport $k = -\frac{1}{2}$ convient. Notons r le rayon du cercle $\mathcal{C}$ et R le rayon du cercle $\mathcal{C}'$. On a $R = \left|-\frac{1}{2}\right| r$, donc $k = -\frac{1}{2}$ convient.

On en conclut que $\mathcal{C}' = h(\mathcal{C})$.

Exercice 5

20 Sur la figure ci-dessous, la droite d est tangente en B à $\mathcal{C}$. On note h l'homothétie de centre A qui transforme I en I' .

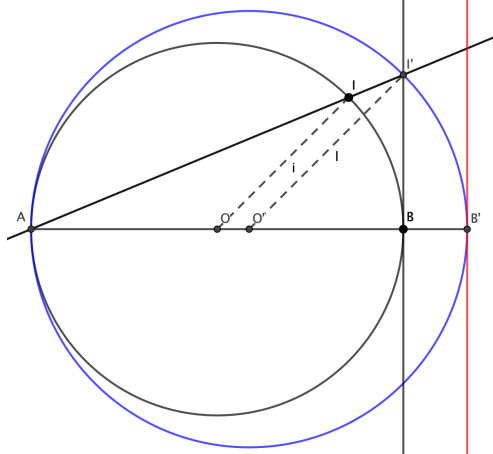


1. Construisez $O' = h(O)$.

Aide : Voir l'exercice résolu 1, p. 385.

2. Construisez le cercle $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par h , puis la droite d' image de d .

Solution de l'exercice 5



Exercice 6

24 $\mathcal{C}$ est un cercle de rayon 3, son image par une homothétie h est un cercle $\mathcal{C}'$ dont l'aire est quatre fois celle de $\mathcal{C}$. Que peut-on dire du rapport de h ?

Solution de l'exercice 6

L'hypothèse du rayon du cercle $\mathcal{C}$ est inutile. Notons $\mathcal{A}'$ l'aire du cercle $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{A}$ l'aire du cercle $\mathcal{C}$. Alors

$$\mathcal{A}' = 4\mathcal{A}$$

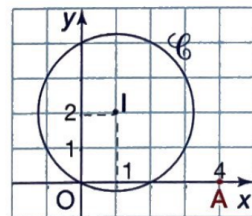
Or, l'homothétie considérée est de rapport k , donc on sait que

$$\mathcal{A}' = k^2\mathcal{A}$$

On en déduit que $k^2 = 4$, et donc que $k = -2$ ou $k = 2$.

Exercice 7

52 En exploitant les renseignements portés sur la figure ci-contre trouvez, dans chaque cas, une équation de $\mathcal{C}'$, image de $\mathcal{C}$ par la transformation indiquée.



1. L'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.
2. La réflexion d'axe (AI) .
3. La translation de vecteur $\vec{IA}$.

Solution de l'exercice 7

On sait que, d'après la figure, $\mathcal{C}$ est un cercle de centre $I(1; 2)$ et de rayon $IO = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

1. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$. Notons I' le centre du cercle $\mathcal{C}'$. Ainsi $\vec{AI'} = -\frac{1}{2}\vec{AI}$. Or, $\vec{AI} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $\vec{AI'} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$. Or, $A(4; 0)$ et d'après la relation de Chasles, $\vec{OI'} = \vec{OA} + \vec{AI'}$. Donc $\vec{OI'} \begin{pmatrix} 4 + \frac{3}{2} \\ 0 - 1 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\vec{OI'} \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$. De plus, si on note $R_{\mathcal{C}'}$ le rayon du cercle $\mathcal{C}'$ et $R_{\mathcal{C}}$ le rayon du cercle $\mathcal{C}$, on a la relation

$$R_{\mathcal{C}'} = \left|-\frac{1}{2}\right| R_{\mathcal{C}}$$

D'où $R_{\mathcal{C}'} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, une équation du cercle $\mathcal{C}'$ est

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

ou encore, en développant

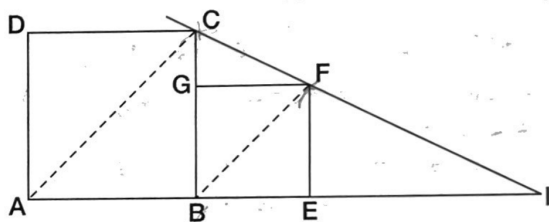
$$x^2 - 11x + y^2 + 2y + 30 = 0$$

2. Le centre I du cercle $\mathcal{C}$ est sur l'axe (AI) de la réflexion, ainsi I est invariant par la réflexion. De plus, une réflexion est une isométrie, donc le rayon est conservé. Ainsi $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$.
3. Par la translation de vecteur $\vec{IA}$, le point I est envoyé sur le point A . Donc le point A est le centre du cercle $\mathcal{C}'$. De plus, une translation est une isométrie, donc le rayon est conservé. Ainsi, une équation du cercle $\mathcal{C}'$ est

$$(x - 4)^2 + y^2 = \sqrt{5}^2$$

c'est-à-dire, en développant, $x^2 - 8x + y^2 + 11 = 0$.

23



- Aide :** Voir l'exercice résolu 2, p. 387.

So

- $BEFG$ est un carré et $[BF]$ est une diagonale de ce carré. Ainsi $[BF]$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{EBG}$. Or, $\widehat{EBG} = 90^\circ$. Donc $\widehat{EBF} = 45^\circ$.

(b) Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{EBF}$ sont correspondants et de même mesure. Donc (AC) et (BF) sont parallèles.

2. (a) On sait que h transforme A et B et que h transforme la droite (AC) en une droite qui lui est parallèle.

Donc l'image de (AC) est la droite parallèle à (AC) passant par B . Donc l'image de (AC) est la droite (BF) .

Or, l'image du point C par h se trouve sur la droite (CI) . Donc l'image du point C est le point d'intersection entre (CI) et l'image de (AC) par h , c'est-à-dire le point F .

- (b) Soit k le rapport de l'homothétie h de centre I . $[BF]$ est l'image de $[AC]$ par h , donc $BF = kAC$.

Or, dans le triangle ABC' rectangle en B ,
d'après le théorème de Pythagore,
 $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Par le même raisonnement dans le triangle BEF rectangle en E ,

$$BF = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}. \text{ Ainsi}$$

$$2\sqrt{2} = k \times 3\sqrt{2}, \text{ et donc } 2 = 3k, \text{ i.e. } k = \frac{2}{3}.$$

3. G est l'image de D par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$. Or, par une homothétie, un

26

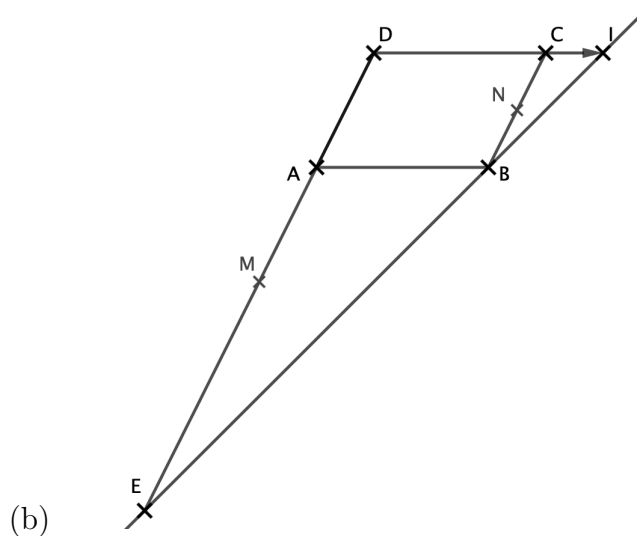
- b) Construisez E tel que $h(E) = B$.**

So

1. (a) On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ID} &= \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{IC} - 3\overrightarrow{CI} \\ &= \overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IC} \\ &= 4\overrightarrow{IC}\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{ID}$ et ainsi h est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{4}$.



2. F est le milieu du segment $[DE]$ et N le milieu du segment $[BC]$ par l'homothétie qui transforme $[DE]$ en $[BC]$ par construction du point E . Or

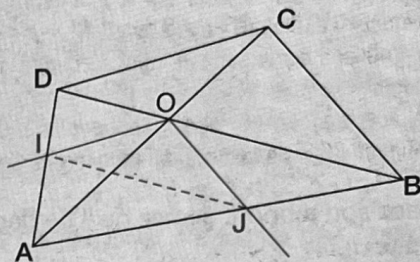
Exercice 10

36 Démontrer que deux droites sont parallèles

ABCD est un quadrilatère convexe, les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O. La parallèle à (DC) passant par O coupe (AD) en I, la parallèle à (BC) passant par O coupe (AB) en J.

Objectif : démontrer que les droites (IJ) et (BD) sont parallèles.

1. Analysons la figure pour en tirer des conséquences. Par hypothèse, (OI) est parallèle à (DC) et (OJ) est parallèle à (CB). L'examen de la figure montre alors des triangles homothétiques, de sommet commun A, qui peuvent inciter à utiliser une homothétie de centre A.



- Donnez les deux paires de triangles homothétiques.
- Quelle(s) homothétie(s) pouvez-vous alors utiliser ?

2. Il s'agit de démontrer que deux droites sont parallèles. Si on utilise une homothétie h , une façon de faire est de prouver que l'une est l'image de l'autre par h .

- En utilisant, par exemple, l'homothétie h de centre A qui transforme O en C, prouvez que l'image par h de la droite (IJ) est la droite (BD).
- Concluez.

3. Rédigez une solution.

Solution de l'exercice 10

- Les deux paires de triangles homothétiques sont AIO et ADC ainsi que AOJ et ACB .
 - On peut, par exemple, utiliser l'homothétie de centre A qui envoie I sur D, ou de la même façon l'homothétie de centre A qui envoie J sur B, ou encore l'homothétie de centre A qui envoie O sur C.
- Soit h l'homothétie de centre A qui transforme O en C.
On sait que l'image de la droite (IO) est une droite parallèle à (IO) passant par l'image de O, c'est-à-dire C. Or, la parallèle à (IO) passant par C est la droite (DC). Donc (DC) est l'image de (IO) par h . Donc D est l'image de I.
 - De même, on sait que l'image de la droite (JO) est une droite parallèle à (JO) passant par l'image de O, c'est-à-dire C. Or, la parallèle à (JO) passant par C est la droite

(BC). Donc (BC) est l'image de (JO) par h . Donc B est l'image de J.

On en conclut que l'image de (IJ) par h est la droite (BD).

- L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

Or, (BD) est l'image de (IJ) par h .

Donc (IJ) est parallèle à (BD), ce que l'on voulait montrer.

Exercice 11

44 ABCD est un quadrilatère convexe, les diagonales [BD] et [AC] se coupent en O. La parallèle à (BC) menée par A coupe (DB) en E et la parallèle à (AD) menée par B coupe (AC) en F.

- On note h_1 l'homothétie de centre O, de rapport k_1 , telle que $h_1(A) = F$.

- Démontrez que $h_1(D) = B$.

- Déduisez-en que $\overrightarrow{OF} = k_1 \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB} = k_1 \overrightarrow{OD}$.

- On note h_2 l'homothétie de centre O, de rapport k_2 , telle que $h_2(C) = A$.

- Démontrez que $h_2(B) = E$.

- Déduisez-en que $\overrightarrow{OE} = k_2 \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA} = k_2 \overrightarrow{OC}$.

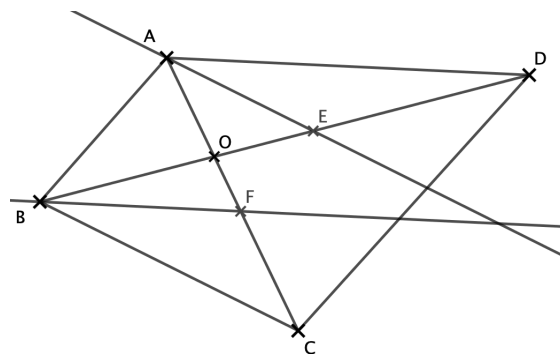
- Des questions précédentes, déduisez que :

$$\overrightarrow{OE} = k_1 k_2 \overrightarrow{OD} \text{ et } \overrightarrow{OF} = k_1 k_2 \overrightarrow{OC}.$$

- Démontrez que (DC) et (EF) sont parallèles.

Aide : Voir l'exercice 36, Pour apprendre à chercher.

Solution de l'exercice 11



- L'image de la droite (AD) par l'homothétie h_1 est la droite parallèle à (AD) passant par l'image du point A, c'est-à-dire passant par F. Donc (BF) est l'image de (AD). De plus, l'image du point D est sur l'image de la droite (AD) et est sur la droite (OD). Le point d'intersection entre (BF) et (OD) est B. Donc $h_1(D) = B$.
 - F est l'image de A par l'homothétie h_1 de rapport k_1 signifie, par définition de h_1 , que $\overrightarrow{OF} = k_1 \overrightarrow{OA}$. De même, B est l'image de D par l'homothétie h_1 de rapport k_1 signifie, par définition de h_1 , que $\overrightarrow{OB} = k_1 \overrightarrow{OD}$.
- L'image de la droite (BC) par l'homothétie h_2 est la droite parallèle à (BC) passant par l'image du point C, c'est-à-dire passant par

A. Donc (AE) est l'image de (BC) . De plus, l'image du point B est alignée avec B et O , donc l'image de B est l'intersection entre (AE) et (BO) , c'est-à-dire E .

(b) F est l'image de A par l'homothétie h_1 de rapport k_1 signifie, par définition de h_1 , que $\overrightarrow{OF} = h_1 \overrightarrow{OA}$. De même, B est l'image de D par l'homothétie h_1 de rapport k_1 signifie, par définition de h_1 , que $\overrightarrow{OB} = h_1 \overrightarrow{OD}$.

3. (a) On sait que $\overrightarrow{OE} = k_2 \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB} = k_1 \overrightarrow{OD}$, donc $\overrightarrow{OE} = k_2 k_1 \overrightarrow{OD}$. De même, $\overrightarrow{OF} = k_1 \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA} = k_2 \overrightarrow{OC}$, donc $\overrightarrow{OF} = k_1 k_2 \overrightarrow{OC}$.

(b) D'après la première relation précédente, E est l'image de D par l'homothétie de centre O et de rayon $k_1 k_2$. De même, d'après la deuxième relation précédente, F est l'image de C par l'homothétie de centre O et de rayon $k_1 k_2$. Ainsi l'image de (DC) par cette homothétie est la droite (EF) . Or, l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle. Donc (DC) et (EF) sont parallèles.

Exercice 12

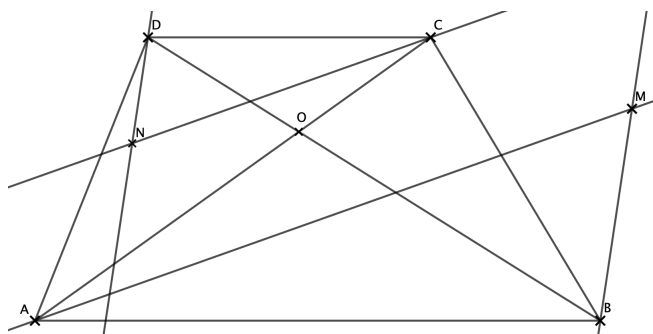
★ **45** ABCD est un trapèze, O est l'intersection de ses diagonales. M est un point « extérieur » au trapèze. La parallèle à (AM) menée par C coupe la parallèle à (BM) menée par D en N . On note h l'homothétie de centre O telle que $h(A) = C$. Démontrez, en utilisant l'homothétie h , que les points O, M, N sont alignés.

On suppose de plus que (AB) est parallèle à (CD) , pour que l'exercice soit correct.

Solution de l'exercice 12

Par construction, (BM) est parallèle à (DN) et (AM) est parallèle à (CN) .

On considère h l'homothétie de centre O telle que $h(A) = C$.



- Par hypothèse, (AB) est parallèle à (DC) et l'image de A est C . Donc $h(B)$ appartient à la droite (OB) et à la parallèle à (AB) passant par C . Ainsi $h(B) = D$.

- (BM) et (DN) sont parallèles par construction et $h(B) = D$ d'après le point précédent. Donc $h(M) \in (DN)$.

- (AM) et (CN) sont parallèles par construction et $h(A) = C$ d'après l'énoncé. Donc $h(M) \in (CN)$.

On en conclut que $h(M)$ est le point d'intersection entre (DN) et (CN) , soit $h(M) = N$.

Enfin, par une homothétie, un point, son image et le centre de cette homothétie sont alignés.

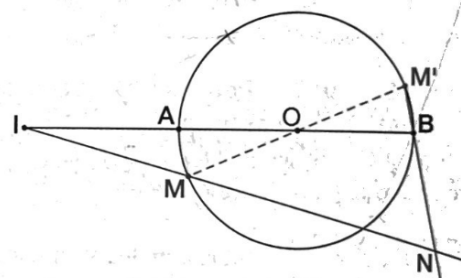
On en conclut que M, N et O sont alignés, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 13

39 Chercher un lieu géométrique

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O , $[AB]$ un diamètre. Le point I est tel que $\vec{AI} = -\vec{AO}$. M est un point de $\mathcal{C}$, $M \neq A$ et $M \neq B$, M' est le point diamétralement opposé à M et N est l'intersection de (IM) et (BM') .

Objectif : trouver le lieu de N lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privé de A et B .



1. Vous pouvez vous reporter à la partie *Types de problèmes et raisonnements*, § 4, p. 418. Il faut d'abord repérer les points fixes remarquables et les points mobiles :

- I, A, O, B sont fixes,
- M, M', N sont mobiles : M décrit $\mathcal{C}$, privé de A et B (donc M' aussi). N dépend de M .

Cherchons des liens entre M, N et les points fixes de la figure.

- $[AB]$ et $[MM']$ sont deux diamètres de $\mathcal{C}$. Quelle conséquence pour le quadrilatère $(AMBM')$? Déduez-en que (AM) et (BN) sont parallèles.
- Les triangles IAM et IBN sont donc homothétiques de sommet I .

Déduez-en que N est l'image de M par une homothétie h . Précisez le centre de h et son rapport. (Notez qu'ils ne dépendent pas de M .)

2. Ainsi chaque point N , associé à un point M , est l'image de M par une homothétie fixe. Le lieu de N qui, par définition, est l'ensemble de tous les points N associés à tous les points M du cercle $\mathcal{C}$ privé de A et B , est donc l'image par h du cercle $\mathcal{C}$ privé de A et B .

Précisez cette image.

3. Rédigez une solution.

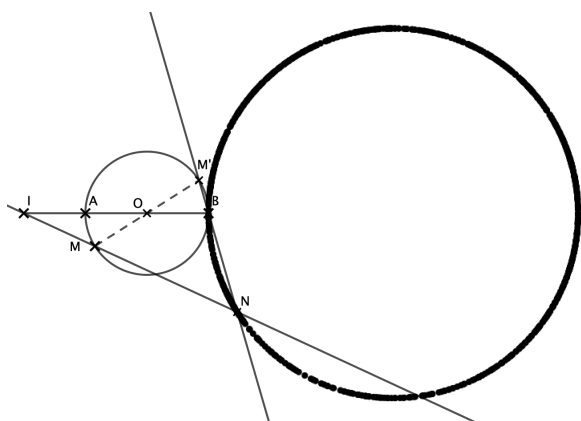
Solution de l'exercice 13

1. (a) $[AB]$ et $[MM']$ sont les deux diagonales du quadrilatère $AMBM'$. Or, $[AB]$ et $[MM']$ sont deux diamètres du cercle $\mathcal{C}$, donc le quadrilatère $AMBM'$ a ses diagonales de même longueur qui se coupent en leur milieu. Ainsi $AMBM'$ est un parallélogramme. Ainsi, $AMBM'$ a ses côtés opposés parallèles et de même longueur. Ainsi (AM) est parallèle à (BM') , et puisque $N \in (BM')$, (AM) et (BN) sont parallèles.
- (b) Les triangles IAM et IBN sont homothétiques de sommet I : ce sont deux triangles ayant un sommet commun (le point I) et tels que deux côtés homologues (les côtés (AM) et (BN)) sont parallèles. De plus, I , A et B sont alignés, donc B est l'image de A par h , l'homothétie de centre I qui envoie A sur B . De plus,

$$\begin{aligned}\vec{IB} &= \vec{IA} + \vec{AO} + \vec{OB} \\ &= 3\vec{IA}\end{aligned}$$

Donc h est l'homothétie de centre I et de rapport. Enfin, (AM) et (BN) sont parallèles et les points I , M et N sont alignés. Donc N est l'image de M par h .

2. L'image du cercle $\mathcal{C}$ est donc un cercle de rayon $3OA$ et de centre l'image du point O par l'homothétie h .



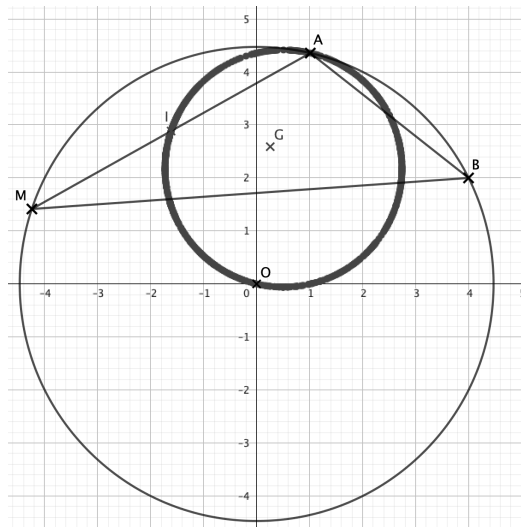
Exercice 14

79 $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et A et B sont deux points donnés de $\mathcal{C}$. M est un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B . On note G le centre de gravité du triangle AMB et I le milieu de $[AM]$.

1. Quel est le lieu de I quand M décrit $\mathcal{C}$ privé de A et B ?
2. Quel est le lieu de G quand M décrit $\mathcal{C}$ privé de A et B ?

Solution de l'exercice 14

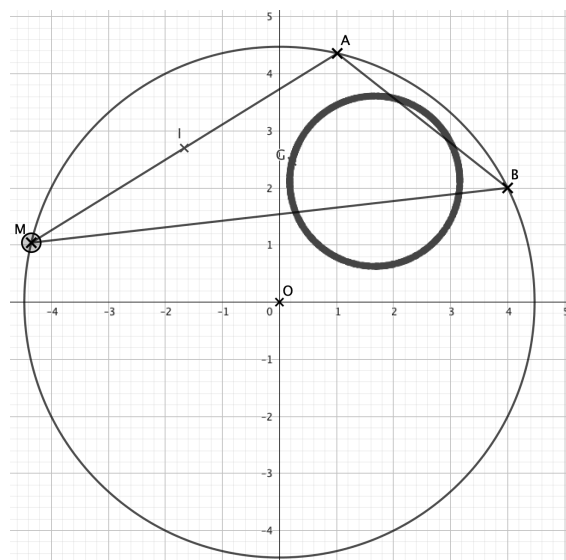
1. Grâce à un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture que le lieu de I quand M décrit $\mathcal{C}$ privé de A et B est un cercle dont on va déterminer les éléments caractéristiques :



I est l'image du point M par l'homothétie h_1 de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Donc quand M parcourt le cercle $\mathcal{C}$, I décrit le cercle image de $\mathcal{C}$ par h_1 . $h_1(\mathcal{C})$ est donc le cercle de centre $h_1(O)$ (qui est le milieu de $[OA]$) et de rayon $\frac{1}{2}OA$.

Le point A étant invariant par l'homothétie, il est cohérent que les deux cercles passent par le point A .

2. Grâce à un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture que le lieu de G quand M décrit $\mathcal{C}$ privé de A et B est un cercle dont on va déterminer les éléments caractéristiques : G est l'intersection des médianes et I est le milieu de $[AM]$. Ainsi $\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BI}$. Donc G est l'image de I par l'homothétie h_2 de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$. Ainsi, le lieu de G est le cercle image du lieu de I par l'homothétie h_2 . Le rayon du cercle est $\frac{1}{3}OA$.



1. Quel est le lieu $\mathcal{C}_1$ de N lorsque M décrit $\mathcal{C}$?
2. Quel est le lieu $\mathcal{C}_2$ de P lorsque M décrit $\mathcal{C}$?
3. Construisez $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sur une même figure.

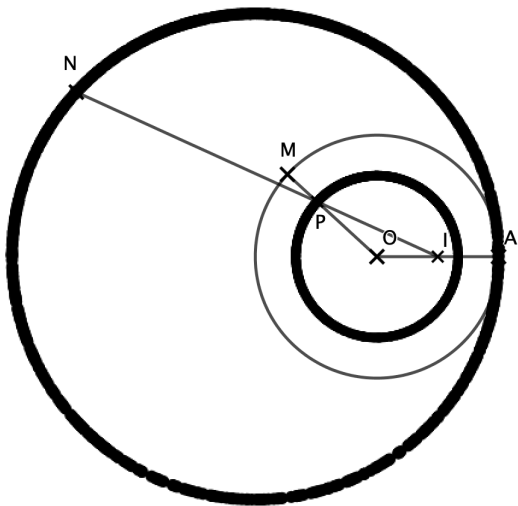
Solution de l'exercice 15

1. N est le symétrique de A par rapport à M , donc N est l'image de A par l'homothétie h_1 de centre A et de rapport 2.

Ainsi lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$, N décrit l'image de $\mathcal{C}$ par l'homothétie h_1 , c'est-à-dire un cercle de rayon $2OA$ et de centre l'image de O par cette homothétie.

2. (NI) et (OM) sont deux médianes du triangle NOA concourantes en P , ainsi P est le centre de gravité du triangle NOA . Donc $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$, et donc P est l'image du point M par l'homothétie h_2 de centre O et de rapport $\frac{2}{3}$. Ainsi lorsque

M décrit le cercle $\mathcal{C}$, P décrit l'image de $\mathcal{C}$ par l'homothétie h_2 , c'est-à-dire le cercle de rayon $\frac{2}{3}OA$ et de centre l'image de O par cette homothétie, c'est-à-dire O . Les deux cercles sont **concentrique**.



84 Dans un plan orienté, on donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O , une droite d extérieure à $\mathcal{C}$ et un point A fixe de d . À tout point M de $\mathcal{C}$, on associe le point N tel que le triangle AMN soit équilatéral avec $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{3}$.

1. Quel est le lieu géométrique $\mathcal{L}_1$ de N lorsque M décrit $\mathcal{C}$? Construisez $\mathcal{L}_1$.

2. Quel est le lieu géométrique $\mathcal{L}_2$ de P, projeté orthogonal de M sur (AN) ? Construisez $\mathcal{L}_2$.

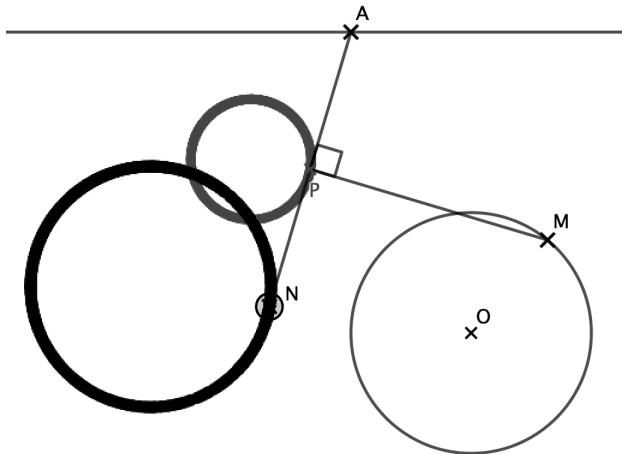
Solution de l'exercice 16

1. N est l'image du point M par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Donc, M décrit $\mathcal{C}$, le point

N décrit $\mathcal{L}_1$, l'image de $\mathcal{C}$, qui est le cercle de centre l'image de O par r et de même rayon (car r est une isométrie, donc r conserve les longueurs). On peut remarquer que le point O' (centre du cercle image) est tel que le triangle AOO' est équilatéral indirect.

2. Le triangle AMN est équilatéral. P est le projeté orthogonal de M sur $[AN]$, donc $[MP]$ est la hauteur issue de M , donc la médiane issue de M , donc P est le milieu de $[AN]$.

Ainsi P est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Ainsi, le lieu cherché est l'image du cercle $\mathcal{L}_1$ par l'homothétie de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$.



3.

