

Séquence IX – Continuité et bijection

Continuité et ensemble-image



Exercice IX.1

La fonction f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en 0 ? continue sur $\mathbb{R}$?



Exercice IX.2

Étudier la continuité des fonctions définies par :

1. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ pour $x \neq -1$ et $f(-1) = -2$

2. $g(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ pour $x > 1$ et $g(1) = 1$



Exercice IX.3

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.



Exercice IX.4

Soit m un réel fixé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2x + m & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Discuter de la continuité à gauche, à droite et globale en 1 en fonction de la valeur du paramètre m .



Exercice IX.5

On appelle fonction partie entière la fonction qui, à tout réel x , associe le plus grand des entiers inférieurs ou égaux à x , c'est-à-dire l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$.

Ce nombre entier est appelée « partie entière » de x et est noté $E(x)$.

La partie décimale de x est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = x - E(x)$$

Tracer les représentations graphiques de E et F sur l'intervalle $[-2; 3]$. Étudier leur continuité.



Exercice IX.6

La fonction f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ m & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Quelle valeur faut-il donner au réel m afin que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?



Exercice IX.7

La fonction f est définie sur $[0; 2[$ par :

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

Expliciter $f(x)$ sans le symbole $E(x)$ sur $[0; 2[$.
La fonction f est-elle continue sur $[0; 2[$?



Exercice IX.8

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-1; 2[$ par :

$$f(x) = E(x) \sin(\pi x)$$

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de $\sin(\pi x)$ sur chacun des intervalles $[-1; 0]$, $[0; 1[$ et $[1; 2[$. En déduire la continuité de la fonction f sur l'intervalle I .
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0 et en 1.
3. Étudier les variations de f sur I .
4. Donner l'allure de la courbe représentative de f .



Exercice IX.9

Une fonction f est définie sur $I = [0; 3]$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

Préciser $f(I)$.

Séquence IX – Continuité et bijection

Théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection



Exercice IX.10

Montrer que l'équation $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$



Exercice IX.11

La fonction f est définie et continue sur $I = [0; 1]$, telle que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.

Démontrer qu'il existe un réel a tel que : $f(a) = a$ (on pourra introduire la fonction D définie sur I par : $D(x) = f(x) - x$).

Interpréter graphiquement ce résultat.



Exercice IX.12

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

Montrer qu'il existe un réel $c \in [-1; 0]$ tel que $f(c) = 0$.



Exercice IX.13

Montrer que $f : x \mapsto x^2 - 4x + 1$ est une bijection de $I = [2; +\infty[$ sur $J = [-3; +\infty[$ et déterminer f^{-1} .



Exercice IX.14

La fonction f est définie par : $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$.

Démontrer que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution sur $I = \left[-\frac{3}{2}; -1\right[$.



Exercice IX.15

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 + x - 2$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle α .
3. Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x et de α .
4. En déduire les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^4 + (x-2)^2}$.



Exercice IX.16

On considère l'équation $(E) : \frac{x+1}{x} = \sqrt{x^2+4}$.

1. Démontrer que le réel x est solution de (E) si et seulement si : $\begin{cases} x \in]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[\\ x^4 + 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2x - 1$.
 - (a) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution réelle α et que $\alpha \in [0; 1]$.
 - (b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles dont l'une appartient à l'intervalle $[-1; 0]$ et l'autre à l'intervalle $[0; 1]$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de ces solutions.
 - (c) Déterminer le nombre de solutions de (E) et donner une valeur approchée de chacune.



Exercice IX.17

Soit f la fonction définie sur $I = [-2; 2]$ par : $f(x) = -x^3 + 3x + 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans l'intervalle I .
2. On se propose dans la suite de déterminer la valeur exacte de ces solutions.
 - (a) Démontrer que pour tout réel u : $\sin(3u) = 3 \sin u - 4 \sin^3 u$.
 - (b) Démontrer que pour tout $x \in I$, il existe un unique réel u tel que : $x = 2 \sin u$. Montrer alors que : $\begin{cases} f(x) = 0 \\ x = 2 \sin u \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + 2 \sin 3u = 0 \\ x = 2 \sin u \end{cases}$
 - (c) Exprimer les trois solutions de l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $2 \sin \alpha$ où $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



Exercice IX.18

Soit m est un réel et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = x^3 + mx^2 - 8x - m$. On note $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de la fonction f_m dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que les courbes $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$ se coupent en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
2. Les courbes $(\mathcal{C}_m)$ ont-elles des points communs?
3. Montrer que l'équation $f_m(x) = 0$ admet exactement trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.