

Continuité et bijection

1. Continuité

Rappel :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Donc f est définie en a . Rappelons que si la fonction f admet une limite finie en a , alors cette limite ne peut être que $f(a)$.

DÉFINITION :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$. On dit que la fonction f **est continue en a** si la fonction f admet une limite finie en a , c'est-à-dire si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

DÉFINITION :

On dit que la fonction f est **continue sur l'intervalle I** si la fonction f est continue en tout $a \in I$.

Remarque : Si la fonction f est continue sur l'intervalle I alors le tracé de $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est « d'un seul morceau ».

PROPRIÉTÉ :

Si la fonction f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a .

Les exemples suivants sont des conséquences directes de la propriété précédente :

Exemples :

- Les fonctions polynômes sont dérivables donc continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont dérivables donc continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est dérivable donc continue sur $]0; +\infty[$ et comme de plus : $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$, elle est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque : La fonction valeur absolue vérifie :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} |x| &= 0 \\ &= |0| \end{aligned}$$

donc elle est continue en 0. Or, elle n'est pas dérivable en 0.

Donc la réciproque de la proposition précédente est fausse.

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

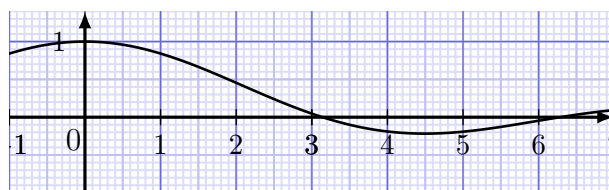
La fonction f est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et est définie sur $\mathbb{R}^*$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donc continue sur $\mathbb{R}^*$.

D'autre part, on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et } f(0) = 1, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Ainsi la fonction f est continue en 0.

On en conclut que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.



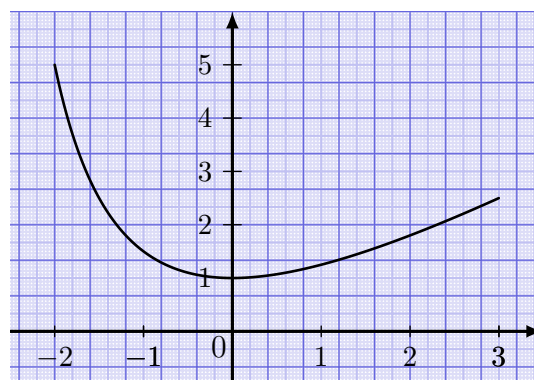
2. Images d'intervalles

Exemple :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 3]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+3} + 1$$

dont on donne ci-après l'allure de la représentation graphique.



L'image de l'intervalle $I = [-2; 3]$ par la fonction f est l'ensemble J des réels y vérifiant

$$\begin{cases} \forall x \in [-2; 3], f(x) \in J \\ \forall y \in J, \exists x \in [-2; 3], f(x) = y \end{cases}$$

L'image de l'intervalle I par la fonction f se note $f(I)$.

- $J = \left[\frac{5}{2}; 5\right]$ répond-il à la définition ?
 $J = \left[\frac{5}{2}; 5\right]$ ne répond pas à la définition : en effet, il existe des réels $x \in [-2; 3]$ dont l'image n'appartient pas à J . Contre-exemple : $f(0) \notin J$
- L'ensemble $J = [0; 5]$ répond-il à la définition ?
 $J = [0; 5]$ ne répond pas à la définition : en effet, il existe des réels $y \in J$ qui n'ont pas d'antécédents par f . Contre-exemple : $0, 5$.
- Conjecturer l'ensemble J par lecture graphique.
Graphiquement, on conjecture que $f(I) = [1; 5]$.
On va maintenant démontrer cette conjecture :
Démontrer que : $\forall x \in [-2; 3] : f(x) \in [1; 5]$.
Soit $x \in [-2; 3]$.

$$\begin{aligned} -2 \leq x \leq 3 &\iff 1 \leq x+3 \leq 6 \\ &\iff \frac{1}{6} \leq \frac{1}{x+3} \leq 1 \end{aligned}$$

De plus, $-2 \leq x \leq 3$, donc $0 \leq x^2 \leq 9$.

Par produit, $0 \leq \frac{x^2}{x+3} \leq 9$

On en conclut que $1 \leq f(x) \leq 10$, la première inégalité est donc vérifiée. Pour la deuxième, étudions le signe de $f(x) - 5$:

$$\begin{aligned} f(x) - 5 &= \frac{x^2}{x+3} + 1 - 5 \\ &= \frac{x^2}{x+3} - 4 \\ &= \frac{x^2 - 4x - 12}{x+3} \\ &= \frac{(x+2)(x-6)}{x+3} \end{aligned}$$

Ainsi on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-3	-2	6	$+\infty$	
$x + 2$		$-$	$-$	$+$	$+$	
$x - 6$	$-$	$-$	$-$	$+$		
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

Donc $f(x) - 5 \leq 0$ pour tout $x \in [-2; 6]$, et $[-2; 3] \subset [-2; 6]$.

Donc, pour tout $x \in [-2; 3]$, $f(x) \leq 5$.

Ainsi : $f(I) \subset [1; 5]$. Mais, conformément à la définition de $f(I)$, il faut réciproquement montrer que $[1; 5] \subset f(I)$, c'est-à-dire que :

$$\forall y \in [1; 5], \exists x \in [-2; 3], f(x) = y$$

- Soit $y \in [1; 5]$. Résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{x^2}{x+3} + 1 = y \\ &\iff \frac{x^2 + x + 3}{x+3} = y \\ &\iff x^2 + x + 3 = y(x+3) \\ &\iff x^2 + x + 3 - yx - 3y = 0 \\ &\iff x^2 + (1-y)x + 3(1-y) = 0 \end{aligned}$$

Considérons cela comme une équation du second degré d'inconnue x et de paramètre y .

$$\begin{aligned} \Delta &= (1-y)^2 - 4 \times 1 \times 3(1-y) \\ &= (1-y)(1-y-12) \\ &= (1-y)(-y-11) \\ &= (y-1)(y+11) \end{aligned}$$

Puisque $y \in [1; 5]$, $y-1 \geq 0$ et $y+11 \geq 0$. Donc $\Delta \geq 0$, ainsi le trinôme précédent admet deux racines réelles (éventuellement confondus) :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(1-y) - \sqrt{(y-1)(y+11)}}{2} \\ &= \frac{y-1 - \sqrt{(y-1)(y+11)}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{De même, } x_2 = \frac{y-1 + \sqrt{(y-1)(y+11)}}{2}$$

- Montrer que le réel $\frac{y-1 - \sqrt{(y+11)(y-1)}}{2}$ appartient l'intervalle $[-2; 3]$. Conclure.
On a montré que

$$[1; 5] \subset f(I) \text{ et } f(I) \subset [1; 5]$$

Ainsi, on a montré par double inclusion, que : $f(I) = [1; 5]$.

Remarque : L'image de l'intervalle $[-2; 3]$ par la fonction f est donc un intervalle. On peut démontrer que cette propriété est vérifiée par toute fonction continue et tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

■ THÉORÈME

Si la fonction f est continue sur l'intervalle I , alors $f(I)$ est un intervalle.

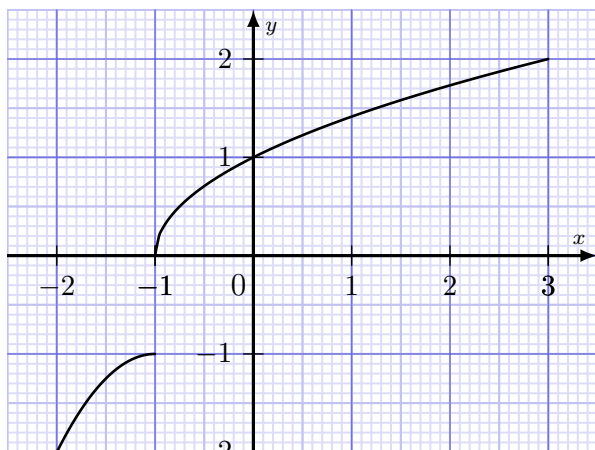
Remarque : On peut observer qu'avec une fonction discontinue sur l'intervalle I , l'ensemble $f(I)$ n'est pas forcément un intervalle.

Exemple :

La fonction f définie sur $I = [-2; 3]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 - 1 & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } -1 < x \leq 3 \end{cases}$$

est discontinue en $a = -1$ et $f([-2; 3]) = [-2; -1] \cup [0; 2]$ qui n'est pas un intervalle.

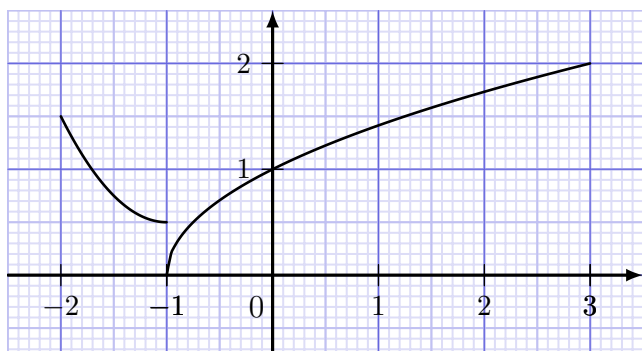


Exemple :

Il est aussi possible que f soit discontinue sur I et que $f(I)$ soit malgré tout un intervalle. Par exemple, la fonction f définie sur $I = [-2; 3]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 + \frac{1}{2} & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } -1 < x \leq 3 \end{cases}$$

est discontinue en $a = -1$ et pourtant, $f([-2; 3]) = [0; 2]$, qui est un intervalle.



On a plus précisément la proposition suivante :

■ PROPRIÉTÉ :

Dans les tableaux ci-dessous, a et b désignent deux réels ou $-\infty$ ou $+\infty$.

Si la fonction f est continue sur l'intervalle $I =$	Et si la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I alors $f(I) =$
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$
$]a; b]$	$\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x); f(b)\right]$
$[a; b[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b} f(x)\right[$
$]a; b[$	$\left]\lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x)\right[$

Si la fonction f est continue sur l'intervalle $I =$	Et si la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I alors $f(I) =$
$[a; b]$	$[f(b); f(a)]$
$]a; b]$	$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a} f(x)\right[$
$[a; b[$	$\left]\lim_{x \rightarrow b} f(x); f(a)\right]$
$]a; b[$	$\left]\lim_{x \rightarrow b} f(x); \lim_{x \rightarrow a} f(x)\right]$

Exemple :

Cette propriété permet de simplifier l'étude de l'exemple de la page précédente, après avoir étudié les variations de la fonction f , qui est dérivable donc continue sur $[-2; 3]$. Comme la fonction f est strictement décroissante sur $[-2; 0]$, le théorème donne :

$$f([-2; 0]) = [f(0); f(-2)] = [1; 5]$$

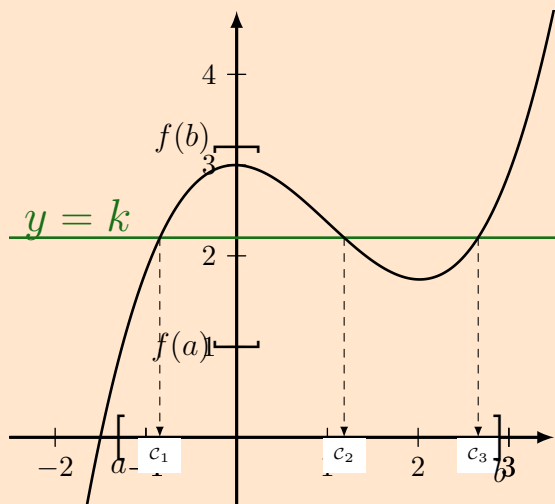
Comme la fonction f est strictement croissante sur $[0; 3]$, alors $f([0; 3]) = [f(0); f(3)] = \left[1; \frac{5}{2}\right]$

Ainsi : $f([-2; 3]) = [1; 5] \cup \left[1; \frac{5}{2}\right] = [1; 5]$.

■ THÉORÈME des valeurs intermédiaires

Soient a et b deux nombres réels et f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a; b]$.

Alors f atteint toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$. Autrement dit, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in I$ tel que $f(c) = k$.



Remarques :

- Le théorème des valeurs intermédiaires peut aussi se formuler ainsi : pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins** une solution.
- L'hypothèse de continuité de la fonction f sur l'intervalle $I = [a; b]$ est suffisante pour aboutir à la conclusion, mais pas nécessaire, comme le montre le second exemple de la page précédente : $f([-2; 3])$ est l'intervalle $[0; 2]$: celui-ci $f(-2) = \frac{3}{2}$ et $f(3) = 2$ et donc tous les réels compris entre $\frac{3}{2}$ et 2 sont eux-mêmes des images de réels de l'intervalle $[-2; 3]$ par la fonction f . Donc pour tout réel k compris entre $\frac{3}{2}$ et 2, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur $[-2; 3]$.
- Face à une question du type : « Montrer que l'équation $f(x) = k$ admet une solution sur l'intervalle I », il y a deux méthodes : soit on sait résoudre l'équation $f(x) = k$ et on la résout, soit on ne le sait pas (c'est le cas le plus fréquent). Alors, si les hypothèses d'application du théorème des valeurs intermédiaires sont vérifiées, il va permettre d'affirmer l'existence d'une solution ; elle pourra ensuite être approchée par des moyens informatiques.

Exemple :

Soit f la fonction définie, pour tout réel x , par $f(x) = x^5 - 5x + 1$. Démontrer l'existence de solutions réelles de l'équation $f(x) = 0$ et conjecturer les valeurs de ses solutions.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme, donc f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 5 \\ &= 5(x^4 - 1) \\ &= 5(x^2 - 1)(x^2 + 1) \\ &= 5(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \end{aligned}$$

On obtient le tableau de signes et de variations suivants :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$			
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$			
$x^2 + 1$	$+$	0	$+$	$+$			
signe de $f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

D'après la calculatrice, on conjecture l'existence de trois solutions valant respectivement environ $x_1 \approx -1,541652$, $x_2 \approx 0,2000641$ et $x_3 \approx 1,4405$.



Démontrer que l'équation admet exactement trois solutions réelles distinctes.

Puisque la fonction f est **strictement** croissante sur l'intervalle $]-\infty; -1]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty; -1[$.

De même, puisque f est **strictement** décroissante sur l'intervalle $[-1; 1]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-1; 1]$.

Enfin, puisque f est **strictement** croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1; +\infty[$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet bien trois solutions distinctes sur $\mathbb{R}$.

Exemple :

L'équation $\cos(x) = x$ admet-elle des solutions réelles ?

L'équation est équivalente à $\cos(x) - x = 0$. Notons f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par $\cos(x) - x$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Grâce à l'étude des limites, on montre que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $0 \in f(\mathbb{R})$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution réelle.

3. Bijection

■ DÉFINITION :

Soient I et J deux intervalles. On dit qu'une fonction f est une **bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J** si :

$$\begin{cases} \forall x \in I, f(x) \in J \\ \forall y \in J, \exists! x \in I, f(x) = y \end{cases}$$

Exemple :

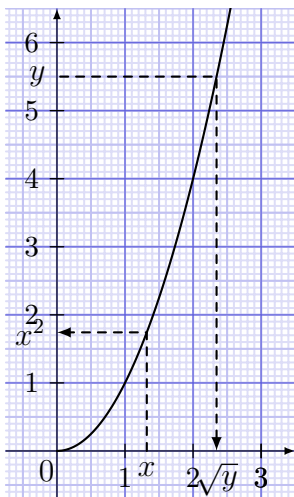
La fonction $f : x \mapsto x^2$ est une bijection de $I = \mathbb{R}_+$ sur $J = \mathbb{R}_+$.

Soit $y \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff x^2 = y \\ &\iff |x| = \sqrt{y} \\ &\iff x = \sqrt{y} \text{ car } x \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi : $x = \sqrt{y}$ est l'unique réel positif tel que $f(x) = y$.

On dit que la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est la **bijection réciproque** de f . On la note f^{-1} .



■ DÉFINITION :

On appelle **bijection réciproque** (ou fonction réciproque, ou réciproque) d'une bijection f est l'application qui associe à chaque élément de l'ensemble d'arrivée son unique antécédent par f . Elle se note f^{-1} .

Exemple :

Soit $f : x \mapsto 2x + 3$. Établir que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer f^{-1} .

Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 2x + 3 = y \\ &\iff 2x = y - 3 \\ &\iff x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ainsi $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$ est l'unique réel tel que $f(x) = y$. Ainsi, la bijection réciproque de la fonction f est

$$f^{-1} : y \mapsto \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$$

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est-elle une bijection de $I =]0; +\infty[$ sur $J =]0; +\infty[$? Si oui, déterminer f^{-1} .

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{1}{x} = y \\ &\iff x = \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Ainsi $x = \frac{1}{y}$ est l'unique réel tel que $f(x) = y$. Ainsi, la bijection réciproque de la fonction f est

$$f^{-1} = f$$

■ DÉFINITION :

Une fonction f bijective vérifiant $f = f^{-1}$ s'appelle une **fonction involutive** ou une **involution**.

■ PROPRIÉTÉ :

Si la fonction f est une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J alors :

- $\forall x \in I, f^{-1}(f(x)) = x$
- $\forall y \in J, f(f^{-1}(y)) = y$.
- $\forall (x; y) \in I \times J, f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

■ PROPRIÉTÉ :

Si la fonction f est une bijection strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle J , alors sa bijection réciproque est de même monotonie sur l'intervalle J .

Démonstration. Supposons par exemple que la fonction f est strictement croissante sur I .

Soient $(y_1; y_2) \in J^2$. La fonction f est une bijection de I sur J donc il existe un unique couple $(x_1; x_2) \in I^2$ tel que : $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$.

Supposons : $y_1 < y_2$ c'est-à-dire : $f(x_1) < f(x_2)$.

Comme la fonction f est strictement croissante sur I , on en déduit : $x_1 < x_2$ (en effet, si on avait : $x_2 < x_1$ alors par stricte croissante de f , on aurait : $f(x_2) < f(x_1)$).

Ainsi : $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ ce qui montre que f^{-1} est strictement croissante sur J .

On peut mener une démonstration similaire en supposant que f est strictement décroissante sur I . $\square$

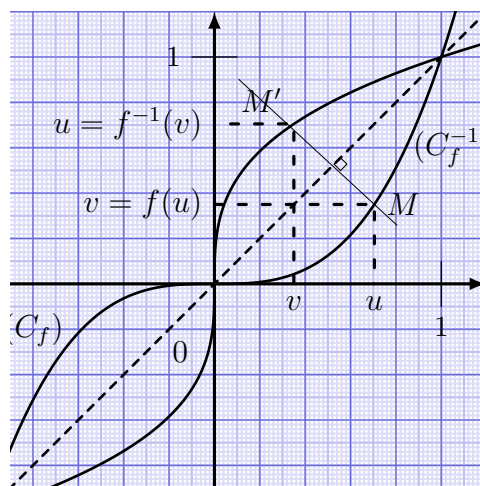
■ PROPRIÉTÉ :

Soit f une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J et $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ la représentation graphique de la bijection réciproque de f . Alors

$(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à $(\Delta) : y = x$

Démonstration. Observons que pour $(u; v) \in I \times J$:

$$\begin{aligned} M(u; v) \in (\mathcal{C}_f) &\Leftrightarrow v = f(u) \\ &\Leftrightarrow u = f^{-1}(v) \\ &\Leftrightarrow M'(v; u) \in (\mathcal{C}_{f^{-1}}) \end{aligned}$$



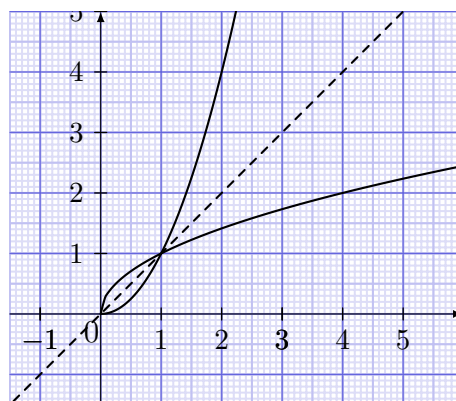
Or, le milieu du segment $[MM']$ a pour coordonnées $\left(\frac{u+v}{2}; \frac{u+v}{2}\right)$, c'est donc un point de la droite d'équation $(\Delta) : y = x$. De plus $\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} v-u \\ u-v \end{pmatrix}$ et si l'on nomme $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite (Δ) , alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{w} &= 1 \times (v-u) + 1 \times (u-v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc la droite (Δ) est perpendiculaire au segment $[MM']$ en son milieu : autrement dit, le point M' est le symétrique de M par la symétrie axiale d'axe (Δ) . $\square$

Exemple :

Par exemple, les courbes représentatives de la fonction carré, bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et de sa bijection réciproque, la fonction racine carrée, sont symétriques par rapport à $(\Delta) : y = x$:



Lorsqu'on ne sait pas résoudre l'équation $f(x) = y$ où $(x; y) \in I \times J$, comment peut-on le cas échéant justifier que la fonction f est une bijection de I sur J ? C'est le but du théorème suivant.

■ THÉORÈME de la bijection

Si la fonction f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I , alors la fonction f est une bijection (ou réalise une bijection, ou est bijective) de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

Démonstration. La fonction f étant continue sur l'intervalle I , le théorème page 3 affirme que $J = f(I)$ est un intervalle.

Soit $y_0 \in J$: alors par définition de $f(I)$, il existe au moins un réel $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Montrons que ce réel x_0 est unique.

Supposons par exemple que la fonction f soit strictement croissante sur l'intervalle I : on en déduit que pour tout $x > x_0$: $f(x) > f(x_0)$, donc $f(x) > y_0$ et donc $f(x) \neq y_0$.

De même, pour tout $x < x_0$: $f(x) < f(x_0)$, donc $f(x) < y_0$ et donc $f(x) \neq y_0$.

Ainsi, pour tout $x \neq x_0$, on a $f(x) \neq y_0$, ce qui montre que x_0 est l'unique réel dans I tel que $f(x_0) = y_0$.

Ainsi, la fonction f est une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$. Le raisonnement est analogue dans le cas où la fonction f est strictement décroissante sur I . $\square$

Exemple :

Montrer que la fonction $i : x \mapsto \frac{1}{x}$ réalise une bijection de $]0; 1]$ sur $[1; +\infty[$.

On sait que la fonction restriction de la fonction inverse à l'intervalle $]0; 1]$ est strictement décroissante et est continue.

De plus, $f(]0; 1]) = \left[1; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}\right[= [1; +\infty[$.

Donc i est une bijection de $]0; 1]$ vers $[1; +\infty[$.

■ THÉORÈME de la bijection (reformulation)

Soit I un intervalle. Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction. Si

- la fonction f est continue sur I
- la fonction f est strictement monotone sur I
- $k \in f(I)$

alors l'équation $f(x) = k$ admet une **unique solution** sur I .

Exemple :

Montrer que l'équation $x + \tan x = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in I$, par $f(x) = x + \tan x$.

- f est une somme de fonctions dérivables sur I , donc f est dérivable sur I , donc f est continue sur I .
- f est une somme de fonctions strictement croissantes sur I , donc f est strictement croissante sur I .
- $f(I) = \left[\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x); \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x)\right[=]-\infty; +\infty[$

et $2 \in f(I)$

Ainsi l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur I .

Remarque : Toute les fonctions bijectives ne sont pas obligatoirement continues ou strictement monotones.

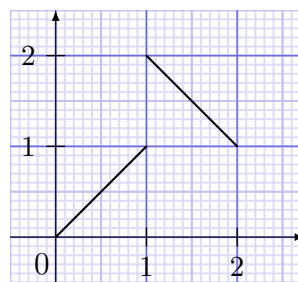
Exemple :

La fonction f définie sur $I = [0; 2]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0; 1[\\ 3 - x & \text{si } x \in [1; 2] \end{cases}$$

réalise une bijection de $I = [0; 2]$ sur

$J = f(I) = [0; 2]$ et elle n'est ni continue ni monotone sur I .



Remarques :

- Une question du type :

« Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet (au moins) une solution sur l'intervalle I »

doit faire penser à l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires.

- Une question du type :

« Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle I »

doit faire penser à l'utilisation du théorème de la bijection.

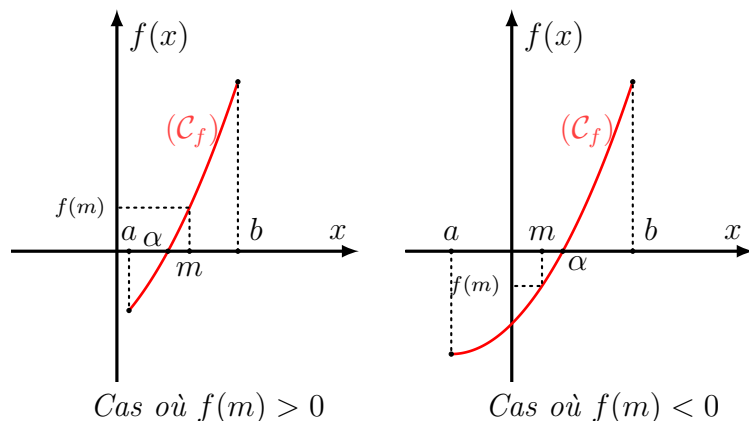
4. Approximation d'une solution d'équation : l'algorithme de dichotomie

On se place dans le cadre suivant :

la fonction f est continue sur l'intervalle I et on a démontré que l'équation $f(x) = 0$ admet dans I une unique solution α . On suppose que les réels a et b sont dans l'intervalle I , que $a < b$ et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents : le théorème des valeurs intermédiaires implique alors que α est compris entre a et b .

On calcule alors $f(m)$ où $m = \frac{a+b}{2}$.

- Si $f(m) \geq 0$, le théorème des valeurs intermédiaires va alors impliquer que : $a \leq \alpha \leq m$
- Si $f(m) \leq 0$, le théorème des valeurs intermédiaires va alors impliquer que : $m \leq \alpha \leq b$.



On peut alors itérer le procédé en remplaçant b par m dans le premier cas et a par m dans le second cas. Dans les deux cas, l'amplitude de l'encadrement de α est divisée par 2.

C'est le principe de l'**algorithme de dichotomie** (du grec ancien διχοτομία : division en deux parties).

Remarques :

- Un moyen simple de tester avec un ordinateur si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents est de tester si $f(a) \times f(b) \leq 0$.
- À chaque étape : $a \leq \alpha \leq b$, donc la distance entre α et a (ou b) est inférieure à la distance $|b - a|$ entre a et b , c'est-à-dire que a (ou b) donne une valeur approchée de α à $|b - a|$ près.

La condition d'arrêt de l'algorithme pourra être que $|b - a|$ est inférieur à une certaine précision 10^{-p} , où $p \in \mathbb{N}^*$.

L'algorithme de dichotomie peut alors s'écrire en langage naturel :

Lire a

Lire b

Lire p

Tant que $|b - a| > 10^{-p}$, alors :

$$m \leftarrow \frac{a+b}{2}$$

Si $f(a) * f(m) \geq 0$ Alors

$$b \leftarrow m$$

Sinon

$$a \leftarrow m$$

Afficher a « est une valeur approchée de » α

Afficher « à » 10^{-p} « près ».

Exemple :

Utiliser cet algorithme pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-8} près.

On cherche une valeur approchée de la solution positive de l'équation $x^2 - 2 = 0$.

Lien vers l'algorithme sur que l'on voit évoluer sur Geogebra : [ici](#), ou sur le QR-code :



On programme l'algorithme avec, par exemple, $p = 10$, $a = 1$ et $b = 2$ et on obtient

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356$$

Exemple :

Utiliser cet algorithme pour obtenir une valeur approchée au dix-millième de l'unique solution sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ de l'équation : $x + \tan x = 2$.

D'après l'étude précédente, on sait que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Lien vers l'algorithme sur que l'on voit évoluer sur Geogebra : [ici](#), ou sur le QR-code :



On applique donc l'équation avec $p = 4$, $a = -\frac{\pi}{2}$ et $b = \frac{\pi}{2}$, et on obtient :

$$\alpha \approx 0,8535$$