

Séquence VIII – Probabilités discrètes – généralités

Exercice VIII.1

On lance deux dés cubiques, l'un bleu, l'autre rouge, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On crée un nombre à deux chiffres dont celui des dizaines est lu sur le dé rouge et celui des unités sur le dé bleu. Déterminer l'univers Ω .

Exercice VIII.2

On lance trois fois de suite la même pièce de monnaie et on note dans l'ordre, à chaque lancer, la face de la pièce qui est apparue (P comme Pile ou F comme Face). Déterminer l'univers Ω .

Exercice VIII.3

Un dé est truqué. On estime que les probabilités d'apparition des faces 2, 3, 4, 5 sont égales, que la probabilité d'apparition de la face 6 est deux fois plus petite que celle de 2 et que la probabilité d'obtenir 1 est 0,5. Donner la loi de probabilité ainsi définie sur $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Exercice VIII.4

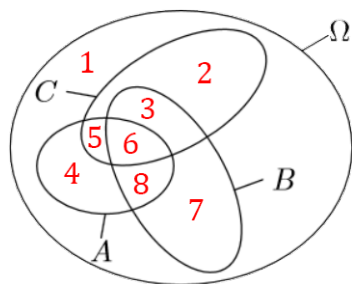
Un dé est truqué de sorte que les probabilités de sortie des numéros sont proportionnelles à ces numéros. Donner la loi de probabilité ainsi définie sur $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Exercice VIII.5

On lance deux pièces équilibrées dont l'une est truquée (elle possède deux faces Face). On note les faces visibles des pièces. Décrire Ω et donner la loi de probabilité sur Ω .

Exercice VIII.6

L'ensemble Ω contient les trois sous-ensembles A , B et C . Quel est le numéro (ou les numéros) correspondant à l'ensemble $A \cap B \cap \bar{C}$?

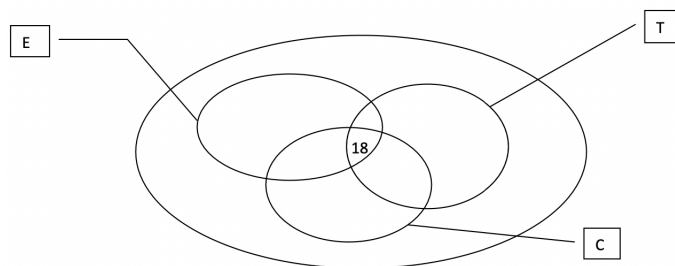


Exercice VIII.7

Dans un club de vacances de 150 touristes, trois activités sportives sont proposées : tennis, équitation et canoë. On note T l'ensemble des personnes qui pratiquent le tennis, E l'ensemble des personnes qui pratiquent l'équitation et C l'ensemble des personnes qui pratiquent le canoë.

- 18 pratiquent les trois activités
- 25 pratiquent l'équitation et le canoë
- 53 pratiquent le tennis et le canoë
- 70 pratiquent le canoë
- 78 pratiquent le tennis
- 35 pratiquent l'équitation, dont 23 également le tennis

Compléter le diagramme ci-dessous :



1. Combien de personnes ne pratiquent aucune des activités sportives proposées ?
2. L'expérience aléatoire consiste à rencontrer au hasard une personne de ce club et à noter les activités qu'elle pratique. Calculer le cardinal de chacun des événements suivants, c'est-à-dire le nombre d'issues qu'ils contiennent.

- T
- $B = \text{« La personne pratique seulement le tennis »}$
- $T \cap C$
- $T \cup C$
- $T \cap C \cap E$
- $(T \cup E) \cap C$

Séquence VIII – Probabilités d'événements

Exercice VIII.8

On considère un jeu de 32 cartes dans lequel on prend une carte au hasard que l'on note. On considère les événements : A = « la carte tirée est un cœur » et B = « la carte tirée est un roi ».

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.
2. Calculer $P(\bar{A})$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, $P(A \cap \bar{B})$ et $P(A \cup \bar{B})$.

Exercice VIII.9

Une urne contient sept boules : trois sont noires, numérotées 1, 2 et 3, et quatre sont rouges, numérotées 1, 2, 3 et 4. On prend une boule au hasard dans l'urne, on note sa couleur et le numéro qu'elle porte. On considère les événements A = « la boule tirée est noire », B = « la boule tirée est rouge » et C = « la boule tirée est un nombre pair ».

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.
2. Calculer $P(\bar{C})$.
3. Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cup C)$ et $P(B \cup C)$.
4. Calculer $P(\bar{B} \cap \bar{C})$, $P(A \cap \bar{C})$ et $P(C \cup \bar{A})$.

Exercice VIII.10

Le tableau suivant indique les résultats d'un groupe d'élèves à un examen en fonction de leur qualité d'interne ou d'externe.

	Interne	Externe
Reçus	158	212
Refusés	40	75

1. On rencontre au hasard un élève de ce groupe. On considère les événements R = « l'élève rencontré est reçu » et I = « l'élève rencontré est interne ». Calculer $P(R)$, $P(I \cap R)$ et $P(\bar{R})$.
2. On rencontre au hasard un élève interne. Quelle est la probabilité qu'il soit reçu ?
3. On rencontre au hasard un élève refusé. Quelle est la probabilité qu'il soit externe ?

Exercice VIII.11

Dans sa garde-robe, Évariste a deux pantalons, un noir et un bleu, trois chemises, une bleue, une jaune et une noire ainsi que deux vestes, une bleue et une marron. On appelle *tenue* le triplet (pantalon, chemise, veste).

1. À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de tenues possibles.
2. On suppose que l'ensemble Ω des issues est muni de la **loi équirépartie**. Calculer la probabilité des événements :
 - A = « Évariste est habillé tout en bleu »
 - B = « Évariste porte une chemise et une veste de couleurs différentes »
 - C = « Évariste ne porte ni pantalon ni chemise bleus. »

Exercice VIII.12

Dans un lycée, exactement trois langues vivantes sont enseignées : l'anglais, l'allemand et l'espagnol. 5,8 % des élèves n'étudient aucune langue, 43,4 % des élèves étudient l'allemand, 71,7 % des élèves étudient l'anglais et 50 % des élèves étudient l'espagnol. On sait de plus, que 31,7 % des élèves étudient à la fois l'anglais et l'allemand ; 35 % étudient à la fois l'anglais et l'espagnol, 14,2 % étudient à la fois l'allemand et l'espagnol. On interroge au hasard un élève à la sortie du lycée. Calculer la probabilité des événements suivants :
 M = « l'élève étudie au moins une langue »
 T = « l'élève étudie les trois langues » (on pourra vérifier que cette probabilité est 0,1)
 U = « l'élève étudie exactement une langue »

Exercice VIII.13

Le code d'entrée d'un immeuble est composé, dans l'ordre, d'une lettre choisie parmi A , B , C et D suivie de trois chiffres entre 0 et 9. L'expérience consiste à composer un code au hasard.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Calculer la probabilité de composer le code exact.
3. Calculer la probabilité de composer un code comportant trois chiffres identiques.
4. Calculer la probabilité de composer un code avec trois chiffres différents.
5. Calculer la probabilité de composer un code comportant exactement deux fois le chiffre 1 et une fois le chiffre 2.

Séquence VIII – Variable aléatoire

Exercice VIII.14

L'ensemble $\Omega = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ est muni de la loi équirépartie. On considère la variable aléatoire X qui, à tout élément de Ω , associe son carré. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

Exercice VIII.15

Chacun des mots de l'expression « *par le plus grand des hasards* » est écrit sur un carton et ces six cartons sont disposés dans une urne. On tire au hasard un de ces six cartons et on note X le nombre de lettres qui forment le mot inscrit sur le carton. Donner la loi de probabilité de X , calculer son espérance et son écart-type.

Exercice VIII.16

On lance deux dés parfaitement équilibrés, l'un rouge, l'autre noir. On note le couple de chiffres obtenu à chaque lancer. L'ensemble Ω des couples obtenus est ainsi muni de la loi équirépartie. On considère la variable aléatoire S qui, à chaque couple de Ω , associe la somme de ses deux composantes.

- Déterminer la loi de probabilité de S .
Quelle est la somme la plus probable ?
- Calculer $E(S)$ et en donner une interprétation.

Exercice VIII.17

Une loterie est constituée d'un ensemble E de 2000 billets numérotés de 1 à 2000. Un des billets rapporte un lot de 500 euros, deux billets rapportent un lot de 150 euros et cinq billets rapportent un lot de 100 euros. Le prix du billet est de 2 euros. On achète un billet au hasard. On appelle G la variable aléatoire qui vaut le gain algébrique procuré par le billet acheté.

- Quelles sont les valeurs prises par G ?
Donner sa loi de probabilité.
- Calculer $E(G)$. Interpréter le résultat.
- Calculer $\sigma(G)$.

Exercice VIII.18

Dans un jeu de domino, chaque jeton est partagé en deux parties, chacune portant un numéro de 1 à 6, ou bien elle est laissée vide (on considérera alors qu'elle porte le numéro 0), ces numéros étant représentés par des points.

- Montrer que le nombre de dominos est 28.
- Un joueur tire au hasard un domino.
 - Quelle est la probabilité qu'il obtienne un double, c'est-à-dire un jeton dont les deux parties portent le même numéro ?
 - Quelle est la probabilité de l'événement « la somme des deux numéros est divisible par 3 »
- On appelle X la variable aléatoire prenant la valeur n lorsque le joueur obtient un jeton double n et qui prend la valeur -1 lorsque le joueur obtient un jeton non double.
 - Quelle est la loi de probabilité de X ?
 - Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice VIII.19

Un QCM comporte 5 questions. À chaque question, deux réponses sont proposées dont une seule est correcte. Le correcteur attribue quatre points pour une réponse exacte et enlève deux points pour une réponse fausse. Pour la note finale, tout total négatif sera remplacé par 0. Un élève qui n'a pas travaillé répond au hasard pour chaque question du QCM. Ainsi la note finale X obtenue par l'élève est une variable aléatoire définie sur l'ensemble de toutes les réponses équiprobables au QCM. Quelle note peut espérer cet élève ?

Exercice VIII.20

On place au hasard trois chemises de couleurs bleue, jaune et rouge dans quatre tiroirs a , b , c et d . Chaque rangement des chemises est supposé équiprobable. On note V la variable aléatoire qui, à un rangement des chemises, associe le nombre de tiroirs restés vides.

- Montrer que la loi de probabilité de V est celle donnée par le tableau suivant :

v	1	2	3
$P(V = v)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$

- En moyenne, combien de tiroirs restent vides lors d'un grand nombre de rangements ?