

Probabilités

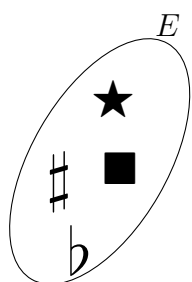
1. Ensembles finis

A. Définitions

■ DÉFINITION :

- Soit E un ensemble.
 E est un **ensemble fini** si et seulement si E est vide ou si E est constitué d'un nombre fini d'éléments.
- Soit E un ensemble fini non vide. On appelle **cardinal de E** et on note $\text{card}(E)$ le nombre d'éléments de E .

Exemple :



$$\text{card}(E) = 4$$

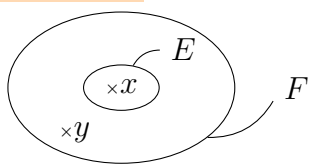
On complète la définition en posant : $\text{card}(\emptyset) = 0$.

■ PROPRIÉTÉ :

Soient E et F deux ensembles finis.

Si E est inclus dans F , alors $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$

Exemple :



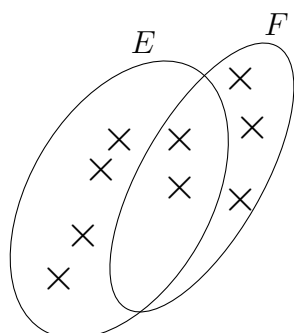
- $\forall x \in E, x \in F$
- $\exists y \in F, y \notin E$

■ PROPRIÉTÉ :

Soient E et F deux ensembles finis.

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$$

Exemple :



$$\text{card}(E) = 6$$

$$\text{card}(F) = 5$$

$$\text{card}(E \cap F) = 2$$

$$\text{card}(E \cup F) = 9$$

B. Vocabulaire des probabilités

Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire statistique	Vocabulaire probabiliste
Ensemble E	Population	Univers Ω .
Élément x avec $x \in E$	Individu	Éventualité ou cas possible.
Sous-ensemble A avec $A \subset E$	Échantillon	Événement $A \subset \Omega$.
Partie vide	$\times$	Événement impossible
Partie pleine	$\times$	Événement certain
Singleton	$\times$	Événement élémentaire

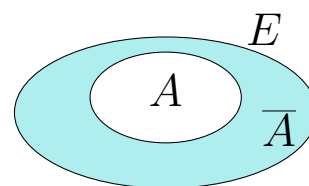
Remarque : Un univers est composé d'éventualités.

Soit Ω un univers.

Soient A et B deux ensembles inclus dans E .

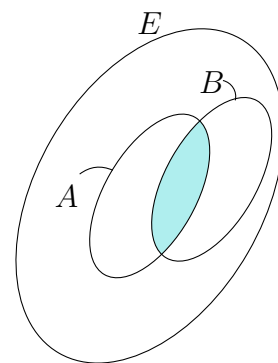
1. $\bar{A}$ est le **complémentaire** de A .

$$x \in \bar{A} \iff x \notin A$$



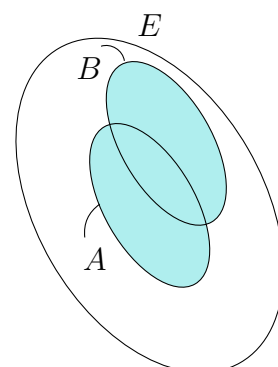
2. $A \cap B$ est l'**intersection** de A et de B .

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$



3. $A \cup B$ est la **réunion** de A et de B .

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$



C. Lois de Morgan

Exemple :

On jette un dé non pipé.

Univers $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Événement A : « Le résultat est pair »

$A = \{2 ; 4 ; 6\}$.

Événement B : « Le résultat est supérieur ou égal à 3 »

$B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

On a :

$$\bar{A} = \{1 ; 3 ; 5\}$$

$$\bar{B} = \{1 ; 2\}$$

$$A \cap B = \{4 ; 6\}$$

$$A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$$

$$\overline{A \cap B} = \{1 ; 2 ; 3 ; 5\}$$

$$\overline{A \cup B} = \{1\}$$

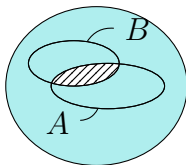
$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{1 ; 2 ; 3 ; 5\}$$

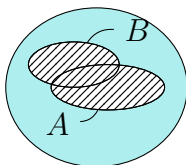
On constate que :

$$\bullet \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$

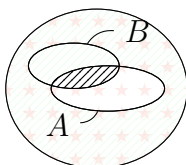
$$\bullet \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$$



$$A \cap B$$



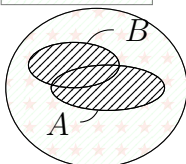
$$A \cup B$$



$$\bar{A} \cap \bar{B}$$



$$\bar{B}$$



$$\bar{A} \cap \bar{B}$$

■ PROPRIÉTÉ : Loi de Morgan

Pour tous événements A et B de l'univers Ω ,

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

2. Définitions et exemples

A. Événements

■ DÉFINITION :

On considère une expérience aléatoire et Ω son univers associé. On appelle **événement** toute partie de Ω .

Exemple :

Quand on lance un dé à 6 faces, $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$. On considère la partie $A = \{2 ; 4 ; 6\}$. A est une partie de Ω , donc A est un événement. Cet événement peut aussi s'écrire en français : $A =$ « tirer un nombre pair ».

Décrire comme partie de Ω les événements

$B =$ « tirer un nombre premier »

et $C =$ « tirer un nombre supérieur ou égal à 2 ».

$$B = \{2 ; 3 ; 5\}$$

$$C = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$$

Exemple :

On pioche une carte dans un jeu de 32 cartes.

Décrire par une phrase l'événement

$$D = \left\{ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{♠} \end{array} ; \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{♥} \end{array} ; \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{♣} \end{array} ; \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{♦} \end{array} \right\}$$

$B =$ « Obtenir un As »

■ DÉFINITION :

Un événement est **impossible** s'il ne se réalise jamais.

■ DÉFINITION :

Un événement est **certain** s'il se réalise toujours, quel que soit le résultat de l'expérience aléatoire.

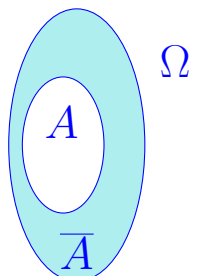
Exemple :

On jette un dé à 6 faces.

- Événement impossible : « Obtenir 10 »
- Événement certain : « Obtenir un nombre compris entre 1 et 6 »

■ DÉFINITION :

On note $\bar{A}$ l'**événement contraire** de A , c'est-à-dire l'événement qui se réalise quand A ne se réalise pas. $\bar{A}$ est l'événement formé des éventualités qui ne sont pas dans A .



Exemple :

On jette un dé à 6 faces. On considère l'événement $A = \{2 ; 4 ; 6\}$. Alors

$$\bar{A} = \{1 ; 3 ; 5\}$$

Et on a bien $\bar{A} = \ll \text{Tirer un nombre impair} \gg$

Exemple :

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
Quel est l'événement contraire de l'événement :

$$R = \left\{ \begin{array}{c} \text{2 de trèfle} ; \text{2 de cœur} ; \text{3 de trèfle} ; \text{3 de cœur} ; \dots ; \text{As de trèfle} ; \text{As de cœur} \end{array} \right\}$$

$$\bar{R} = \{ \text{cartes noires} \}.$$

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire suivante : « On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes, on la note sur un morceau de papier, on remet la carte dans le paquet, on tire une seconde fois une carte au hasard et on note cette carte à droite de la précédente note. ». Quel est l'événement contraire de l'événement $N = \ll \text{tirer deux cartes noires} \gg$.

$$\bar{N} = \ll \text{tirer au moins une carte noire} \gg$$

■ DÉFINITION :

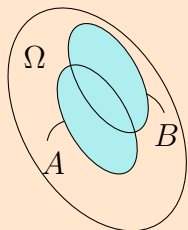
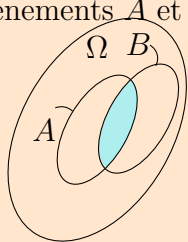
On considère une expérience aléatoire et on note Ω son univers. On considère deux événements A et B .

L'événement « $A \cap B$ » est constitué des issues qui sont dans A et dans B :

$$\ll A \text{ et } B \gg = A \cap B$$

L'événement « $A \cup B$ » est constitué des issues qui sont dans A ou dans B :

$$\ll A \text{ ou } B \gg = A \cup B$$



Remarque : $A \cap B$ est contenu dans $A \cup B$. En mathématiques, le **ou** est **inclusif**, contrairement à son usage en langage courant, où il signifie **ou bien**. Ainsi, le **ou** du langage mathématique est parfois appelé **et/ou** en langage courant.

B. Notion de probabilités

Origine : Loi des grands nombres. Si une expérience aléatoire est répétée un grand nombre de fois, la fréquence d'apparition de chaque événement élémentaire **s'approche** d'un nombre particulier p . Ce nombre est appelé la **probabilité de l'éventualité** e , et on note $P(e) = p$.

■ DÉFINITION :

La **probabilité** d'une issue est la « proportion de chance » théorique d'obtenir cette issue lors d'une expérience aléatoire.

Exemple :

- Si on lance une pièce parfaitement équilibrée,

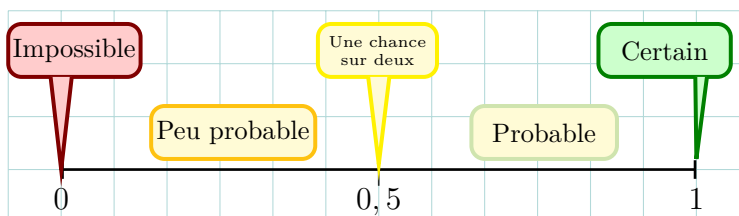
$$P(\text{Obtenir Pile}) = P(\text{Obtenir Face}) = \frac{1}{2}$$

- Si on lance un dé parfaitement équilibré,

$$P(\text{Obtenir } 1) = \dots = P(\text{Obtenir } 6) = \frac{1}{6}$$

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1 et on a les interprétations suivantes :



■ DÉFINITION :

Soit N un nombre entier supérieur ou égal à 1. On considère une expérience aléatoire et son univers associé : $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_N\}$.

Si $P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_N)$, alors on dit qu'il y a **équiprobabilité** sur Ω .

Remarque : Dans une expérience aléatoire, on dit que les issues sont **équiprobables** si elles ont la même probabilité, c'est-à-dire la même chance de survenir.

Exemple :

Dans le cas d'un lancer d'une pièce parfaitement équilibrée ou d'un dé parfaitement équilibré, il y a équiprobabilité sur Ω .

Si on lance un dé truqué, il n'y a pas équiprobabilité.

3. Calcul des probabilités

A. Cas général

■ PROPRIÉTÉ :

Soit N un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout univers $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_N\}$ et toute probabilité P sur Ω , on a

$$P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_N) = 1$$

Exemple :

On considère le lancer d'un dé à six faces parfaitement équilibré. Il y a 6 issues, qui sont les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Chaque issue a une chance sur six d'être réalisée, c'est-à-dire $\frac{1}{6}$.

On a bien

$$\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 1}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 2}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 3}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 4}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 5}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 6}} = 1$$

■ DÉFINITION :

On considère une expérience aléatoire, Ω son univers associé et P une probabilité sur Ω . Soit A un événement. La **probabilité de l'événement** A , notée $P(A)$, est la somme des probabilités des éventualités qui le composent.

Exemple :

On lance un dé parfaitement équilibré. Puisque le dé est parfaitement équilibré, il y a équiprobabilité sur Ω .

Soit A l'événement : « Obtenir un multiple de 3 ».

$A = \{3 ; 6\}$. Alors

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 3}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 6}}$$

$$P(A) = \frac{2}{6}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Quelle que soit l'expérience aléatoire, $P(\Omega) = 1$.

■ PROPRIÉTÉ : (rappel)

Soient Ω un univers, P une probabilité sur Ω et A un événement. Alors $0 \leq P(A) \leq 1$.

Remarque : Cette propriété est très pratique pour vérifier ses résultats après un calcul de probabilité !

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Soit A un événement. Alors

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Exemple :

On reprend le lancer d'un dé à six faces. On considère l'événement : « Ne pas obtenir un 6 ». Notons-le $\overline{A}$. Alors l'événement A est « Obtenir un 6 », et on a vu que $P(A) = \frac{1}{6}$. Donc

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

B. Cas particulier de l'équiprobabilité

S'il y a **équiprobabilité**, on dispose de deux propriétés supplémentaires :

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Dans une expérience aléatoire à n issues **équiprobables**, alors la probabilité de chacune des issues est $\frac{1}{n}$.

Exemple :

Dans un lancer de dé non truqué à six faces, chaque issue a la même probabilité d'apparaître (puisque le dé est non truqué).

Donc la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{6}$, on retrouve le résultat précédent.

■ PROPRIÉTÉ : (admise) Formule de Laplace¹

Dans une expérience aléatoire où toutes les issues sont **équiprobables**, la probabilité d'un événement A vaut

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Exemple :

On considère une urne avec, à l'intérieur, vingt boules indiscernables au toucher. Ces boules sont numérotées de 1 à 20. Déterminer la probabilité de l'événement A : « Tirer un multiple de 5 ».

Les boules sont indiscernables au toucher, donc nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

Il y a 4 multiples de 5 entre 1 et 20, donc

$$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20 \, \%.$$

1. Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) est un mathématicien, physicien et homme politique français.

4. Variable aléatoire, loi de probabilité et espérance mathématique

Exemple :

On extrait au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes, on la note sur un papier, on la remet dans le jeu et on retire une carte, que l'on note à droite de la précédente.

- Calculer $\text{card}(\Omega) = 32 \times 32 = 1024$
- Pour chaque issue, on appelle X le nombre de figures (Valet, Dame, Roi) du tirage. Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?
 $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2\}$
- L'ensemble de toutes les issues pour lesquelles X prend la valeur 0, c'est-à-dire l'ensemble des tirages sans figure, peut se noter : $(X = 0)$: c'est un événement, car c'est une partie de Ω . Autrement dit, $(X = 0) = \{\text{Tirages sans figures}\}$ et

$\text{card}(X = 0) = 20 \times 20$ car il y a $4 \times (8 - 3) = 20$ cartes non figure dans le jeu

Que vaut alors : $P(X = 0)$?
 $P(X = 0) = \frac{\text{card}(X = 0)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{400}{1024} = \frac{25}{64}$

- De même l'ensemble de toutes les issues pour lesquelles X prend la valeur 1, c'est-à-dire l'ensemble des tirages comportant une unique figure, peut se noter : $(X = 1)$.
Vérifier que $P(X = 1) = \frac{30}{64}$.

Il y a $12 \times 20 + 20 \times 12 = 480$ couples de cartes avec exactement une figure. Donc $P(X = 1) = \frac{\text{card}(X = 1)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{480}{1024} = \frac{120}{256} = \frac{30}{64}$

Compléter le tableau suivant :

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{25}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{9}{64}$

Calculer $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$. On obtient $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$

Ce résultat était-il prévisible ? La somme des probabilités vaut 1 quand on parcourt l'ensemble des cas possibles.

DÉFINITION :

On suppose défini un univers des possibles Ω et une probabilité P sur Ω . Une variable aléatoire X associe à chaque issue de Ω un nombre réel : c'est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

Si la variable aléatoire X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_N$, le tableau suivant résume la loi de probabilité de la variable aléatoire X

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_N
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_N

PROPRIÉTÉ :

Avec les notations précédentes :

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_N) = 1$$

Démonstration.

$\Omega = (X = x_1) \cup (X = x_2) \cdots \cup (X = x_N)$ est une réunion d'événements incompatibles. $P(\Omega) = 1$ et

$$P(\Omega) = P(X = x_1) \cup (X = x_2) \cup \cdots \cup (X = x_N) \\ = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_N)$$

DÉFINITION :

Soit une X variable aléatoire de loi de probabilité :

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_N
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_N

L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre noté $E(X)$ et défini par

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_Nx_N = \sum_{k=1}^N p_kx_k$$

Remarque : L'espérance de X est la **moyenne** des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités.

DÉFINITION :

Soit une X variable aléatoire de loi de probabilité :

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_N
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_N

La **variance** de la variable aléatoire X est le nombre noté $V(X)$ et défini par

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 \\ + \cdots + p_N(x_N - E(X))^2 \\ V(X) = \sum_{k=1}^N P(X = x_k) \times (x_k - E(X))^2$$

L'écart-type de la variable aléatoire X est le nombre positif ou nul $\sigma(X)$ et défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

PROPRIÉTÉ : (Formule de König-Huygens)

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$