

Les flocons de von Koch

Résumé

Le but de cette activité est de travailler dans une séance d'exercices autour de la notion de fractales, et de montrer que le périmètre d'un *flocon de von Koch* est infini, alors que son aire est finie.

Les fractales sont des objets qui ont jalonné l'histoire des mathématiques (III^{ème} siècle avant J.-C. avec la baderne d'Apollonius, 1520 avec le pentagone de Dürer, 1890 avec la courbe de Peano, 1917-1918 avec les ensembles de Julia, pour ne citer que quelques exemples).

Benoît Mandelbrot (1924-2010) étudie en profondeur ces objets mathématiques, qui sont donc des objets d'études encore à l'heure actuelle.

On propose, dans cette activité, de vous faire toucher ces objets du bout des doigts, en s'intéressant à la propriété de périmètre infini (qui est à la base de l'article de 1967 qui lance la théorie des fractales par Mandelbrot : *How Long Is the Coast of Britain ?*) alors que l'aire est finie.

La première page a pour but de préciser ce qu'est une fractale (et particulière un **flocon de von Koch**) pour pouvoir lever tout incompréhension de la définition et permettre de répondre aux questions qui se trouvent sur la page suivante.

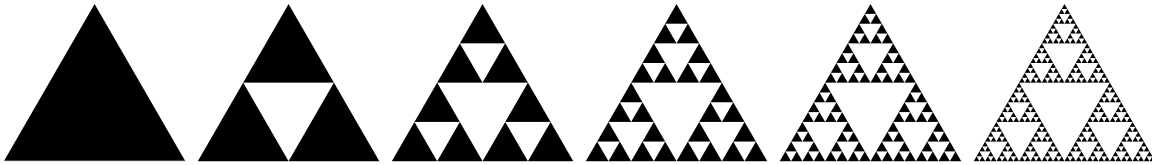
Histoire des mathématiques

■ DÉFINITION :

Une *figure fractale* est un objet mathématique qui présente une structure similaire à toutes les échelles.

Exemple

Construction d'une figure fractale :

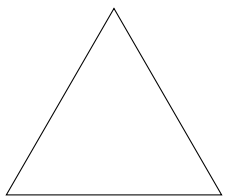


Cette fractale s'appelle un *triangle de Sierpinski*, du nom du mathématicien Wacław Franciszek Sierpiński (polonais, 1882 - 1969)

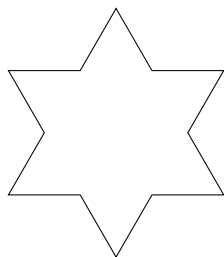
Ces curieux objets mathématiques ont été nommés ainsi par le mathématicien Benoît Mandelbrot (français, 1924 - 2010), mais leur étude a été présente dans l'histoire des mathématiques depuis bien plus longtemps (la première fractale date du III^{ème} siècle avant J.-C.).

Dans cette activité, on propose de s'intéresser à une fractale particulière : le flocon de von Koch, du nom du mathématicien Niels Fabian Helge von Koch (suédois, 1870-1924). Pour construire un flocon de von Koch, on part d'un triangle équilatéral (étape 0), puis, à chaque étape, on adjoint à chacun des côtés de ce triangle équilatéral un petit triangle équilatéral de longueur de côté un tiers de la longueur du côté précédent, et on itère le processus, en considérant à chaque la nouvelle figure obtenue :

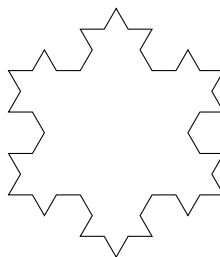
Étape 0



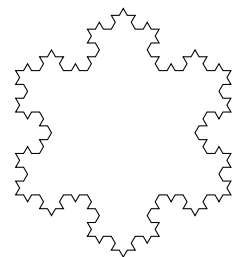
Étape 1



Étape 2



Étape 3



■ DÉFINITION :

Le *flocon de von Koch* est l' « objet limite » quand n tend vers $+\infty$ dans la construction précédente.

■ PROPRIÉTÉ :

Un flocon de von Koch a un périmètre infini mais une aire finie.

1 Périmètre infini

On définit $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite où $\mathcal{P}_n$ est le périmètre d'un flocon de von Koch en cours de construction à la n -ième étape. On pose $\mathcal{P}_0 = 1$.

1. Déterminer $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$.
2. Conjecturer l'expression de $\mathcal{P}_n$ en fonction de n , puis démontrer cette conjecture par récurrence sur n .
3. Déterminer la limite de $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et démontrer ainsi que le périmètre d'un flocon de von Koch est infini.

2 Aire finie

1. Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général le nombre de côtés de la figure à l'étape n . On a donc $c_0 = 3$.
 - (a) Déterminer c_1 puis c_2 .
 - (b) Trouver une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Quelle est la nature de cette suite ? En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = 3 \times 4^n$.
2. Soit $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général la longueur du plus petit segment de la figure construite à l'étape n .
 - (a) Déterminer ℓ_0 , ℓ_1 et ℓ_2 .
 - (b) Conjecturer la valeur de ℓ_n en fonction de n , puis démontrer par récurrence que $\ell_n = \frac{1}{3^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la nature de cette suite ?
3. Enfin, on définit $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite où $\mathcal{A}_n$ est l'aire de la figure construite à la n -ième étape.
 - (a) Que peut-on dire des variations de la suite $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Que peut-on dire du signe de la suite $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
 - (b) Calculer $\mathcal{A}_0$.
 - (c) Calculer, l'aire d'un petit triangle supplémentaire à l'étape 1, puis en déduire $\mathcal{A}_1$.
 - (d) Calculer, en fonction de n , l'aire d'un petit triangle supplémentaire à l'étape $n + 1$.
 - (e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n + \left(c_n \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_{n+1}^2 \right)$$

- (f) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n + \frac{1}{36\sqrt{3}} \times \left(\frac{4}{9} \right)^n$$

- (g) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{A}_k = \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{A}_k \right) + \frac{1}{36\sqrt{3}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{9} \right)^k$$

- (h) Conclure que

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_0 + \frac{1}{36\sqrt{3}} \times \frac{9}{5} \times \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^{n+1} \right)$$

- (i) Montrer que $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie.
- (j) En simplifiant l'expression trouvée à la question précédente, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \frac{2}{15\sqrt{3}}$$

Histoire des mathématiques - Correction

1 Périmètre infini

Soit $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite où $\mathcal{P}_n$ est le périmètre du flocon de von Koch en cours de construction à la n -ième étape. On a donc $\mathcal{P}_0 = 1$.

1. Chaque segment est coupé en trois parties égales. On retire celui du milieu que l'on remplace par deux segments de la même longueur. On multiplie donc la longueur par $\frac{4}{3}$. Ainsi $\mathcal{P}_1 = 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$.

$$\text{Puis, } \mathcal{P}_2 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$

$$\text{Enfin } \mathcal{P}_3 = \frac{16}{9} \times \frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}.$$

2. On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Vérifions que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— Initialisation : pour $n = 0$, on a $\mathcal{P}_0 = 1$ et $\left(\frac{4}{3}\right)^0 = 1$, donc $\mathcal{P}_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^0$ et la propriété est initialisée pour $n = 0$.

— Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On sait que $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n \times \frac{4}{3}$.

Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ et donc

$$\mathcal{P}_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \times \frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$$

— Conclusion : la propriété est initialisée pour $n = 0$ et est héréditaire. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

3. $-1 < \frac{4}{3} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$. On a donc montré que :

Le périmètre d'un flocon de von Koch est infini.

2 Aire finie

1. Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général le nombre de côtés de la figure à l'étape n . On pose $c_0 = 3$.

(a) À l'étape 1, chaque côté est remplacé par 4 côtés, donc il y a $c_1 = 3 \times 4 = 12$ côtés.

À l'étape 2, chaque côté est remplacé quatre nouveaux côtés, donc il y a $c_2 = 12 \times 4 = 48$ côtés.

(b) La relation de récurrence vérifiée par la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = c_n \times 4$$

On rappelle que $c_0 = 3$. Donc $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme 3 et de raison 4. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = 3 \times 4^n$.

2. Soit $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général la longueur du plus petit segment de la figure construite à l'étape n .

(a) Puisque $\mathcal{P}_0 = 1$, il est clair que $\ell_0 = \frac{\mathcal{P}_0}{3} = \frac{1}{3}$. De même, on divise à chaque étape la longueur d'un côté par 3, donc $\ell_1 = \frac{\ell_0}{3} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ et $\ell_2 = \frac{\ell_1}{3} = \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$.

(b) On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell_n = \frac{1}{3^{n+1}}$. Vérifions que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : pour $n = 0$, $l_0 = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3^{0+1}} = \frac{1}{3}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Hérité : supposons que la propriété est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, on construit l'étape $n + 1$ en divisant la longueur du côté ℓ_n par 3, c'est-à-dire

$$\ell_{n+1} = \frac{\ell_n}{3} = \ell_n \times \frac{1}{3}$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\ell_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^{n+2}}$$

Donc la propriété est héréditaire.

- Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ell_n = \frac{1}{3^{n+1}}$$

Cette suite est la suite géométrique de premier terme $\frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

3. $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite où $\mathcal{A}_n$ est l'aire de la figure construite à la n -ième étape.

- (a) La suite $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. En effet, à chaque étape, on adjoint une figure d'aire non nulle à l'extérieur de la figure précédente.

De plus, une aire est toujours positive, donc la suite $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive.

- (b) Appelons ABC le triangle initial et notons c la longueur du côté du triangle.

Alors, en traçant la hauteur issue de A , on obtient la figure ci-contre. Le triangle ABC est équilatéral, donc la hauteur tracée en pointillés est aussi la médiane, et H est donc également le milieu de $[BC]$.

Dans le triangle AHC rectangle en H , on sait que $HC = \frac{BC}{2} = \frac{c}{2}$ et $AC = c$.

D'après le théorème de Pythagore,

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

c'est-à-dire $c^2 = AH^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$, ou encore $c^2 = AH^2 + \frac{c^2}{4}$, ou encore $AH^2 = c^2 - \frac{1}{4}c^2$, c'est-à-dire

$$AH^2 = \frac{3}{4}c^2. \text{ Or, } AH \text{ est une longueur, donc } AH \text{ est positif et ainsi } AH = \sqrt{\frac{3}{4}c^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Enfin, pour calculer l'aire du triangle ABC , on multiplie la base BC par la hauteur AH , puis on divise par 2 :

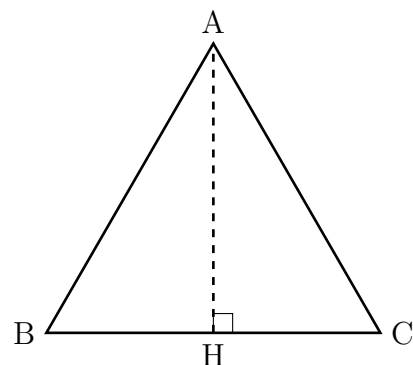
$$\mathcal{A} = \frac{c \times \frac{\sqrt{3}}{2}c}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

Pour $c = \frac{1}{3}$ dans le contexte de notre exercice, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}$

- (c) En utilisant la question précédente, on peut dire que l'aire d'un des nouveaux petits triangles ajoutés à l'étape 1 est $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (l_1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4 \times 81} = \frac{\sqrt{3}}{324}$

On ajoute 3 nouveaux triangles de ce type (car il y a $c_0 = 3$ côtés à l'étape 0), donc l'aire ajoutée est $3 \times \frac{\sqrt{3}}{324} = \frac{\sqrt{3}}{108}$. Ainsi

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 + \frac{\sqrt{3}}{108} = \frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{\sqrt{3}}{108} = \frac{3\sqrt{3}}{108} + \frac{\sqrt{3}}{108} = \frac{4\sqrt{3}}{108} = \frac{\sqrt{3}}{27}$$



- (d) Pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on ajoute des petits triangles dont la longueur d'un côté est ℓ_{n+1} . Ainsi, l'aire d'un nouveau petit triangle ajouté est $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell_{n+1}^2$.
- (e) Pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on adjoint à chacun des c_n côtés un nouveau petit triangle d'aire $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell_{n+1}^2$. L'aire ajoutée est donc $c_n \times \frac{\sqrt{3}}{4}\ell_{n+1}^2$. Ainsi, pour calculer $\mathcal{A}_{n+1}$, on ajoute à $\mathcal{A}_n$ la quantité $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell_{n+1}^2$. Ainsi

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n + c_n \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_{n+1}^2$$

- (f) On a montré à la question 1. (b) que $c_n = 3 \times 4^n$ et on a montré à la question 2. (c) que $\ell_{n+1} = \frac{1}{3^{n+2}}$.
Donc

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n + \left(3 \times 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3^{n+2}}\right)^2\right)$$

i.e.

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n + 3 \times 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{3^{2n+4}}$$

i.e.

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n + 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{3^{2n+3}}$$

i.e.

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n + 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{3^3} \times \frac{1}{3^{2n}}$$

i.e.

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{27} \times \frac{4^n}{9^n}$$

i.e.

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n + \frac{1}{4 \times 9\sqrt{3}} \times \frac{4^n}{9^n}$$

i.e.

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n + \frac{1}{36\sqrt{3}} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

- (g) On veut montrer que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{A}_k = \sum_{k=0}^n \mathcal{A}_k + \frac{1}{36\sqrt{3}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k$$

En utilisant la relation précédente pour chaque $\mathcal{A}_k$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$ dans le membre de gauche de l'égalité attendue, on obtient :

$$\sum_{k=0}^n \mathcal{A}_{k+1} = \sum_{k=0}^n \left(\mathcal{A}_k + \frac{1}{36\sqrt{3}} \times \left(\frac{4}{9}\right)^k \right)$$

On regroupe les termes de la forme $\mathcal{A}_i$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$ dans le membre de droite, et on obtient :

$$\sum_{k=0}^n \mathcal{A}_{k+1} = \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{A}_k \right) + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{36\sqrt{3}} \times \left(\frac{4}{9}\right)^k \right)$$

Puis on factorise par $\frac{1}{36\sqrt{3}}$, et on obtient

$$\sum_{k=0}^n \mathcal{A}_{k+1} = \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{A}_k \right) + \frac{1}{36\sqrt{3}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{9} \right)^k$$

Enfin, on effectue un changement d'indice dans la somme du membre de gauche de l'égalité précédente, et on obtient

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{A}_k = \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{A}_k \right) + \frac{1}{36\sqrt{3}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{9} \right)^k$$

(h) $\sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{9} \right)^k$ est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$ et de premier terme $\left(\frac{4}{9} \right)^0 = 1$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{9} \right)^k = \frac{1 - \left(\frac{4}{9} \right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{9}} \text{ car } \frac{4}{9} \neq 1$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{9} \right)^k = \frac{9}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^{n+1} \right)$$

On remplace dans la relation précédente, et on obtient

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{A}_k = \sum_{k=0}^n \mathcal{A}_k + \frac{1}{36\sqrt{3}} \times \frac{9}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^{n+1} \right)$$

ce qu'il fallait démontrer.

(i) $-1 < \frac{4}{9} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{9} \right)^{n+1} = 0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^{n+1} \right) = 1$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0 + \frac{1}{36\sqrt{3}} \times \frac{9}{5}$$

qui est bien une quantité finie, ce que l'on voulait démontrer.

(j) On a montré à la question 3. (b) que $\mathcal{A}_0 = \frac{\sqrt{3}}{36}$. D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{1}{36\sqrt{3}} \times \frac{9}{5}$$

Tout d'abord, calculons $\frac{1}{36\sqrt{3}} \times \frac{9}{5}$:

$$\frac{1}{36\sqrt{3}} \times \frac{9}{5} = \frac{9}{36\sqrt{3} \times 5} = \frac{9}{180\sqrt{3}} = \frac{3}{60\sqrt{3}} = \frac{1}{20\sqrt{3}}$$

Ainsi, on obtient

$$\frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{1}{20\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times 5\sqrt{3}}{9 \times 4 \times 5\sqrt{3}} + \frac{1 \times 9}{9 \times 4 \times 5\sqrt{3}} = \frac{15}{180\sqrt{3}} + \frac{9}{180\sqrt{3}} = \frac{24}{180\sqrt{3}} = \frac{2}{15\sqrt{3}}$$

On en conclut que l'aire d'un flocon de von Koch est finie, et que celle-ci vaut

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \frac{2}{15\sqrt{3}}}$$