

Séquence VII – Suites – Récurrence

Exercice VII.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \end{cases}$$

1. En calculant les premiers termes de la suite, conjecturer l'expression de u_n en fonction de n .
2. Démontrer cette affirmation par récurrence.

Exercice VII.2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n \end{cases}$$

1. Déterminer u_1 , u_2 , u_3 et u_4
2. Conjecturer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
3. Démontrer cette conjecture.

Exercice VII.3

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$

- $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $3^n \geq 1 + 2n$
- $4^n + 6n - 1$ est divisible par 9

Exercice VII.4 : Une propriété fausse

On veut calculer plus simplement la somme des entiers de 1 à n . On conjecture la propriété (P_n) :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2$$

Cette conjecture est fausse. Montrer que l'implication $(P_n) \implies (P_{n+1})$ est cependant vérifiée.

Exercice VII.5

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $n^3 - n$ est un multiple de 3.

Exercice VII.6

1. Développer, réduire et ordonner $(n+1)^5$
2. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier $n \geq 0$, $n^5 - n$ est un multiple de 5.

Point histoire : Le petit théorème de Fermat

On doit à Pierre de Fermat (1601-1665), juriste de profession et mathématicien amateur, le résultat suivant :

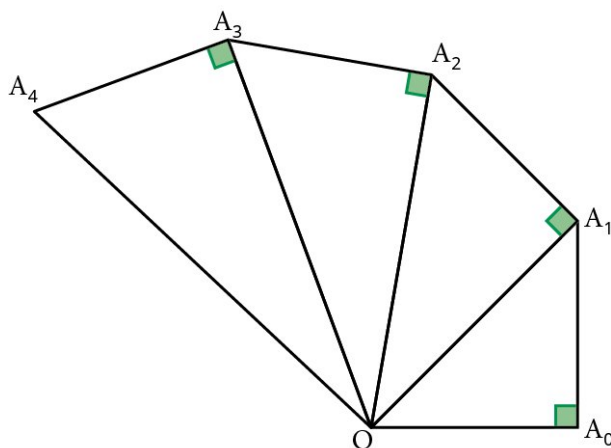
« Lorsque p est premier,
 $n^p - n$ est un multiple de p »

connu sous le nom de *petit théorème de Fermat*.

Fermat a énoncé ce résultat en 1640, sans en apporter la preuve (il faudra attendre Euler en 1741). Vérifié pour $p = 3$ et $p = 5$ dans les deux exercices précédents, nous démontrerons ce résultat en fin de terminale...

Exercice VII.7 : Escargot de Pythagore

On construit une suite de points $A_0, A_1, \dots, A_n$ telle que : $A_0A_1 = A_1A_2 = \dots = A_3A_4$



Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $OA_n = \sqrt{n+1}$

Exercice VII.8 : Inégalité de Bernoulli

Soit a un réel strictement positif. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$(1+a)^n \geq 1+an$$

Séquence VII – Suites – Limites



Exercice VII.9

Déterminer la limite des suites suivantes :

$$\begin{aligned} u_n &= n^2 + 2n - 4 & w_n &= \frac{2}{7 + \sqrt{n}} \\ v_n &= -n^3 + 5 & a_n &= n\sqrt{n} \end{aligned}$$



Exercice VII.10

On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = \frac{3n^2 + 2}{3n^2 + 1}$$

- Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- Déterminer alors les limites des suites

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \text{ et } w_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$$



Exercice VII.11

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n - \sqrt{n}$

- (a) Vérifier que, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

(b) En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Autre méthode :** En factorisant u_n par $\sqrt{n}$, retrouver le résultat de la question précédente. On factorise traditionnellement par le terme « de plus haut degré ».



Exercice VII.12

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant.

- Si une suite diverge vers $+\infty$, alors cette suite est croissante.
- Si une suite est croissante, alors cette suite diverge vers $+\infty$.



Exercice VII.13

Étudier la convergence des suites définies ci-après :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1} & v_n &= \frac{10^n - 1}{10^n + 1} \\ w_n &= \frac{2n + (-1)^n}{3n} & r_n &= \frac{n! - 2}{n!} \\ s_n &= \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}} & t_n &= \frac{3n - \sqrt{9n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 5}} \end{aligned}$$



Exercice VII.14

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel

$$n \geq 1 \text{ par : } \begin{cases} u_1 = \frac{2}{7} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - u_n} \end{cases}.$$

- Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$v_{n+1} = 3v_n - 1$$

- La suite (w_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $w_n = v_n - \frac{1}{2}$.

Démontrer que la suite (w_n) est géométrique. En déduire l'expression de w_n en fonction de n puis celle de u_n .

- La suite (u_n) est-elle convergente ?



Exercice VII.15

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel

$$n \text{ par : } \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{3} \end{cases}.$$

- α étant un nombre réel, on définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - \alpha$. Déterminer la valeur de α pour laquelle la suite (v_n) est géométrique.

- La suite (v_n) est-elle convergente ?

- Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ puis $T_n = \sum_{k=0}^n u_k$. La suite (T_n) est-elle convergente ?



Exercice VII.16 : Somme télescopique

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

- Montrer que : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

En déduire que (u_n) converge.

- La suite (v_n) est définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

Donner une autre expression de v_n et en déduire qu'elle converge.

Séquence VII – Suites – Exercices supplémentaires

Récurrence

Exercice VII.17

Pour démontrer par récurrence que la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 4u_n - 3$ est constante égale à 1, Émilie a rédigé la solution suivante :

« Par hypothèse, on a $u_0 = 1$. donc la propriété est vraie au rang 0 .

Je suppose que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 1$ (hypothèse de récurrence) : alors. on en déduit :

$$u_{n+1} = 4u_n - 3 = 4 \times 1 - 3 = 1$$

Ainsi, la propriété est également vraie au rang $n + 1$.

En conclusion, la propriété étant vraie au rang 0 et héréditaire, on en déduit que. pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n = 1$. »

La copie d'Émilie est-elle satisfaisante ?

Exercice VII.18

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n , par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

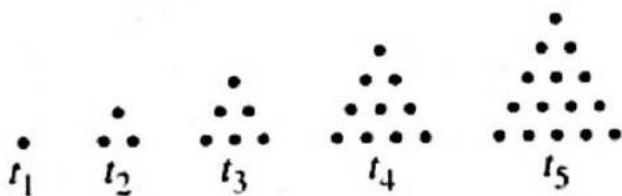
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 3 - 2^n$$

Exercice VII.19

On définit. pour tout entier $n \geq 1$, le n -ième nombre triangulaire par :

$$t_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$



Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n t_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Autre méthode : Le raisonnement par récurrence est pratique quand on connaît l'hypothèse à démontrer. Prouver le résultat précédent sans utiliser la récurrence, c'est-à-dire en utilisant les propriétés du symbole Σ .

Exercice VII.20

1. Calculer les sommes :

- $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3}$
- $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4}$
- $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5}$

2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence. déterminer, pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'expression en fonction de n de :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

Exercice VII.21

On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, étudier la monotonie de la suite (u_n) .

Exercice VII.22

Démontrer que, pour tout entier naturel n , le nombre $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

Exercice VII.23

On s'intéresse ici à la somme S_n des cubes des n premiers entiers naturels **impairs**.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $S_n = 2n^4 - n^2$.
3. Quel est l'entier n pour lequel $S_n = 41\,328$?

Séquence VII – Suites – Limites

Exercices supplémentaires



Exercice VII.24

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définies sur $\mathbb{N}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$ dans chacun des cas suivants :

- $u_n = n^2$ et $v_n = -4n + 4$
- $u_n = n(n-1)$ et $v_n = 10 - n^2$
- $u_n = n + \cos^2(n)$ et $v_n = \sin^2(n) - n$



Exercice VII.25

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définies sur $\mathbb{N}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$ dans chacun des cas suivants :

- $u_n = (n+1)^2$ et $v_n = \frac{1}{2(n+1)}$
- $u_n = 2^{2n+1}$ et $v_n = 2^{3-2n}$
- $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = -\frac{2}{n}$



Exercice VII.26 : la série harmonique

On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

- À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture sur la convergence de la suite (u_n) .
- Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
- Pour tout entier naturel $n \geq 1$, calculer $u_{2n} - u_n$.
 - En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$
- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$.
- La suite (u_n) est-elle convergente ?



Exercice VII.27

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$$

- Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
- Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
- Démontrer que pour tout entier $n \geq 4$, $u_n \geq 2^n$.
- La suite (u_n) est-elle convergente ?



Point histoire : La suite harmonique

Nicolas Oresme (1325-1382), est un philosophe, astronome, mathématicien, économiste, musicologue, physicien, traducteur et théologien de langue latine ayant étudié et vécu dans la France de l'époque médiévale. Il a été évêque de Lisieux et conseiller du roi Charles V le Sage. Il est le premier à avoir démontré ce résultat. L'exercice repose sur sa preuve. Il avait observé que l'on pouvait écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{1+2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) + \dots \end{aligned}$$

en doublant la taille des blocs entre parenthèses à chaque fois. Comme le $k-i$ ème bloc contient 2^{k-1} termes, qui sont tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2^k}$, leur somme est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$. Nicolas Oresme conclut : « il y a ici une infinité de parties dont chacune sera plus grande que la moitié d'un pied, donc le tout sera infini ».

Pourquoi la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ s'appelle-t-elle la série harmonique ? En musique, une série harmonique est une série de sons dont la fréquence est un multiple entier du son fondamental. Par exemple pour le La 440, le La de l'octave audessus est à 880 Hz, celui de l'octave en-dessous à 220 Hz. La note de tierce majeure, Do#, est dans un rapport de $\frac{5}{4}$ avec le son fondamental : donc une fréquence de 550 Hz (ou 275 ou 1100...). La quinte qui complète l'accord parfait (La-Do#-Mi pour La majeur), a pour rapport avec le son fondamental $\frac{3}{2}$ donc a une fréquence de 660 Hz (ou 330, ou 1320...). Si on ne joue que les notes de l'accord parfait de La Majeur, on entend des fréquences de 110, 220, 330, 440, 550 Hz ...donc des vibrations dont les longueurs d'onde sont, à une constante près des inverses d'entiers. Se rappeler que jusqu'à 2 millénaires après Pythagore, la musique a été considérée comme une partie des mathématiques, au même titre que l'arithmétique et l'analyse.

Exercice VII.28

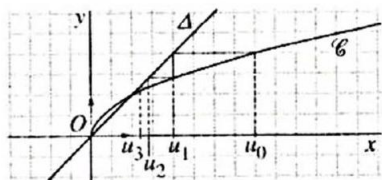
La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{8u_n + 3}{u_n + 6} \end{cases}$$

- (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $1 < u_n < 3$.
(b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$
 - Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
 - Quelle est la limite de (v_n) ? 3° Exprimer, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de v_n . En déduire le comportement à l'infini de u_n .

Exercice VII.29

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. La droite Δ d'équation $y = x$, la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \sqrt{x}$ et les premiers termes de la suite (u_n) sont représentés sur la figure ci-dessous :



On veut démontrer que (u_n) converge vers 1.

- Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq 1$$

- (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{\sqrt{u_n} + 1}$$

- En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2} (u_n - 1)$$

- (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $|u_n - 1| \leq \frac{3}{2^n}$
(b) Conclure à propos de la convergence de la suite (u_n) .



Point histoire : La méthode de Héron d'Alexandrie

La méthode décrite ci-après est attribuée à Héron d'Alexandrie (1^{er} siècle) mais elle était probablement déjà connue des Babyloniens. Elle repose sur l'observation suivante : pour tout $x > 0$, les nombres x et $\frac{2}{x}$ encadrent $\sqrt{2}$ (le vérifier). Ainsi, la moyenne de x et $\frac{2}{x}$ est plus proche de $\sqrt{2}$ que ne l'est x . L'idée est alors d'itérer ce procédé.



Exercice VII.30 : la méthode de Héron d'Alexandrie (1^{er} siècle)

Dans cet exercice, on part de $x = u_1 = \frac{3}{2}$ par exemple.

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel

$$n \geq 1 \text{ par : } \begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) \end{cases}$$

- Calculer, u_2, u_3, u_4 . Comparer ces valeurs avec la valeur de $\sqrt{2}$ fournie par la calculatrice.
- Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n > 0$.
- Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n}$. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n > \sqrt{2}$.
- Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \left(u_n - \sqrt{2} \right) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2^n}.$$
- Conclure sur la convergence de la suite (u_n) .

Remarque conclusive : L'inégalité démontrée à la question 3) montre que si u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-p} près, c'est-à-dire si $|u_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-p}$, alors $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{10^{-2p}}{u_n} \leq 10^{-2p}$, c'est-à-dire que u_{n+1} est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2p} : le nombre de décimales exactes de $\sqrt{2}$ double approximativement à chaque itération. Vérifier ce phénomène sur les approximations de la première question.