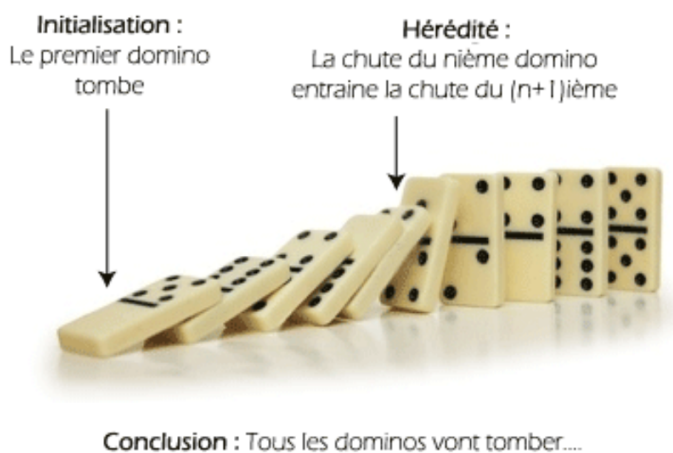


Suites (partie 2)

1. Raisonnement par récurrence

Une suite définie par récurrence est une suite définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir du précédent.

Un **raisonnement par récurrence** permet de démontrer une propriété pour tous les entiers naturels, en procédant de proche en proche.



■ Axiome : axiome¹ d'induction

Pour montrer par récurrence une propriété (P_n) dépendant de l'entier naturel n , on procède en deux étapes :

1. **Initialisation** : on vérifie que (P_0) est vraie.
2. **Hérédité** : On suppose que (P_n) est vraie pour une certaine valeur de n (**hypothèse de récurrence**).

On démontre qu'alors (P_{n+1}) est vraie.

puis on conclut :

(P_0) est vraie et $(P_n) \implies (P_{n+1})$ donc (P_n) est vraie pour tout entier naturel n .

Remarque : Parfois l'initialisation est effectuée pour une valeur de n qui n'est pas 0. Par exemple, si on initialise la récurrence à 31, c'est-à-dire que l'on démontre que (P_{31}) est vraie, alors on prouve par récurrence que (P_n) est vraie pour tout $n \geq 31$.

1. Un **axiome** est une propriété admise au départ d'une théorie. Les axiomes sont les fondements d'une théorie. Les théorèmes sont des résultats déduits des axiomes.

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

On calcule les premiers termes de la suite :

- $u_0 = 0$
- $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$
- $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$
- $u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$

On conjecture que, pour tout entier naturel n , $u_n = n^2$. Démontrons cette propriété par récurrence.

Pour tout entier naturel n , on pose P_n : « $u_n = n^2$ ».

- **Initialisation** : $u_0 = 0$ et $0^2 = 0$.

Donc $u_0 = 0^2$, ainsi P_0 est vraie.

- **Hérédité** : Soit n un entier naturel (fixé). On suppose P_n , c'est-à-dire que $u_n = n^2$. On veut montrer que $u_{n+1} = (n+1)^2$.

D'après la définition de la suite (u_n) ,

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = n^2$, donc

$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} = (n+1)^2$$

Donc P_{n+1} est vraie.

- **Conclusion** : on a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2$$



Attention

La rédaction d'un raisonnement par récurrence doit impérativement comporter toutes les étapes, et les quantificateurs doivent être soigneusement écrits. En particulier, ne **jamais écrire** « pour tout n » (ou $\forall n$) dans l'hérédité !

Remarque : Pour **démontrer une égalité par récurrence**, on est parti d'un des membres de l'égalité que l'on souhaitait montrer, et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a fait apparaître l'égalité attendue.

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrer, par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 2$.

Pour tout entier naturel n , on pose

$$P_n : \ll 0 \leq u_n \leq 2 \gg$$

- **Initialisation** : $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 2$.

Donc $0 \leq u_0 \leq 2$, ainsi P_0 est vraie.

- **Hérédité** : Soit n un entier naturel (fixé). On suppose P_n , c'est-à-dire que $0 \leq u_n \leq 2$. On veut montrer que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$0 \leq u_n \leq 2$$

Donc

$$2 \leq u_n + 2 \leq 4$$

Donc $u_n + 2$ est positif. Par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$, on obtient

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 2$$

D'où

$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$$

et comme $0 \leq \sqrt{2}$, on obtient

$$0 \leq u_{n+1} \leq 2$$

Donc P_{n+1} est vraie.

- **Conclusion** : on a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$$

Remarque : Dans l'exemple précédent, on a donc montré que (u_n) est bornée.

Remarque : Pour **démontrer une inégalité par récurrence**, on est parti de l'hypothèse de récurrence, et par des propriétés du cours, on a obtenu ce que l'on cherchait.

Exemple :

Pour tout entier naturel n , on pose

$$P_n : \ll \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \gg.$$

- **Initialisation** : $\sum_{k=0}^0 k^2 = 0^2 = 0$
et $\frac{0(0+1)(2 \times 0 + 1)}{6} = 0$, donc P_0 est vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel (fixé). On suppose P_n , c'est-à-dire que

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On veut montrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\text{On sait que } \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=0}^n k^2 \right) + (n+1)^2$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

- **Conclusion** : on a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

En résumé :

Pour démontrer une propriété sur des entiers $(\forall n \in A, P_n)$, où A est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, on peut utiliser l'axiome d'induction, qui est l'un des cinq axiomes de Peano² permettant la définition de $\mathbb{N}$.

$$\left. \begin{array}{l} P_{n_0} \\ \forall k \in A, (P_k \Rightarrow P_{k+1}) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in A, P_n$$

Remarque : Ne pas confondre le fait de montrer que P_n est vraie avec le fait de montrer que l'implication $(P_k \Rightarrow P_{k+1})$ est vraie. En pratique, après avoir prouvé que P_{n_0} est vraie (« l'amorce »), on prend comme hypothèse que pour un k quelconque fixé ($k \geq n_0$), la proposition P_k est vraie, puis, grâce à cette hypothèse et aux propriétés de P_k , on montre P_{k+1} .

Remarque : Cette méthode de démonstration est parfois appelée « récurrence de premier ordre » car on définit une **récurrence de second ordre** de la façon suivante :

$$\left. \begin{array}{l} P_{n_0} \\ P_{n_0+1} \\ \forall k \in A, (P_k \text{ et } P_{k+1}) \Rightarrow P_{k+2} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in A, P_n$$

Remarque : On définit la **récurrence forte** de manière analogue :

$$\left. \begin{array}{l} P_{n_0} \\ \forall k \in A, (\forall i \in [n_0; k], P_i) \Rightarrow P_{k+1} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in A, P_n$$

C'est-à-dire qu'ici, on suppose la proposition vraie de n_0 jusqu'au rang k pour démontrer P_{k+1} :

2. En mathématiques, les axiomes de Peano sont des axiomes d'arithmétique proposés à la fin du XIX^e siècle par Giuseppe Peano (1858 - 1932 mathématicien italien), et qui connaissent aujourd'hui plusieurs présentations qui ne sont pas équivalentes, suivant la théorie sous-jacente : théorie des ensembles, logique du second ordre ou d'ordre supérieur, ou logique du premier ordre. La définition axiomatique des entiers naturels de Peano peut être décrite par les cinq axiomes suivants, définissant $\mathbb{N}$:

- L'élément appelé zéro et noté 0 est un entier de $\mathbb{N}$.
- Tout entier n de $\mathbb{N}$ a un unique successeur, noté $s(n)$, qui appartient aussi à $\mathbb{N}$.
- Aucun élément de $\mathbb{N}$ n'a 0 pour successeur dans $\mathbb{N}$.
- Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.
- Si un ensemble d'éléments de $\mathbb{N}$ contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est $\mathbb{N}$.

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout entier n , $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Pour tout entier naturel n , on pose

$$P_n : \text{« } u_n = 3^n - 2^{n+1} \text{ »}.$$

• Initialisation :

— Montrons que P_0 est vraie :

$$3^0 - 2^1 = 1 - 2 = -1$$

et

$$u_0 = -1$$

$$\text{donc } u_0 = 3^0 - 2^1.$$

— De même, montrons que P_1 est vraie :

$$3^1 - 2^2 = 3 - 4 = -1$$

et

$$u_1 = -1$$

$$\text{donc } u_1 = 3^1 - 2^2.$$

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On suppose que P_n et P_{n+1} sont vérifiées. Montrons que P_{n+2} est alors vérifiée. On sait que

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

Or, par hypothèse de récurrence, on obtient

$$u_{n+2} = 5(3^{n+1} - 2^{n+2}) - 6(3^n - 2^{n+1})$$

c'est-à-dire

$$u_{n+2} = 5 \times 3^{n+1} - 5 \times 2^{n+2} - 6 \times 3^n + 6 \times 2^{n+1}$$

ou encore

$$u_{n+2} = 5 \times 3^{n+1} - 5 \times 2^{n+2} - 2 \times 3^{n+1} + 3 \times 2^{n+2}$$

$$\text{c'est-à-dire } u_{n+2} = 3 \times 3^{n+1} - 2 \times 2^{n+2}$$

$$\text{i.e. } u_{n+2} = 3^{n+2} - 2^{n+3}$$

Donc P_{n+2} est vraie.

- **Conclusion** : on a montré par récurrence que

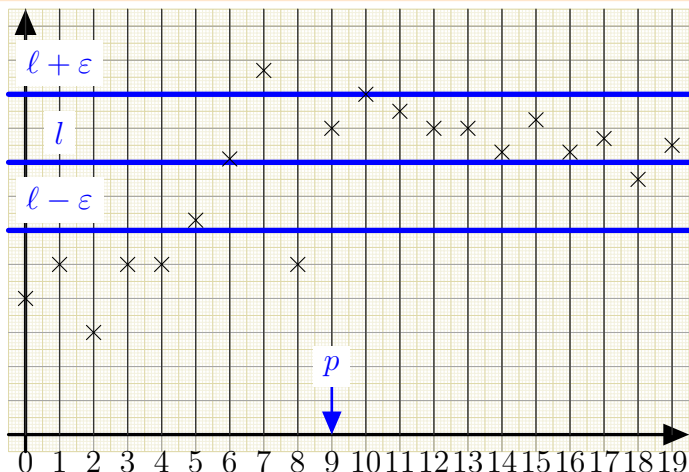
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2^{n+1}$$

2. Comportement asymptotique de suites

A. Suites convergentes

■ DÉFINITION :

On dit que la **suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ si tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang p .



Notation : On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Remarque : Dans la définition, l'entier p dépend de l'intervalle ouvert.

Remarque : Pour $\varepsilon > 0$, comme

$$\begin{aligned} \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon &\iff -\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon \\ &\iff |u_n - \ell| < \varepsilon \end{aligned}$$

la phrase

« Pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$ contient tous les termes u_n à partir du rang p »

est équivalente à la phrase

« Pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]-\varepsilon ; \varepsilon[$ contient tous les $u_n - \ell$ à partir du rang p »

qui est elle-même équivalente à

« Pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]0 ; \varepsilon[$ contient tous les $|u_n - \ell|$ à partir du rang p »

Autrement dit

■ PROPRIÉTÉ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0 \\ &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0 \end{aligned}$$

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2 - \frac{(-1)^n}{n}$$

ε étant un réel positif, résoudre l'inéquation $|u_n - 2| < \varepsilon$. Conclure.

$$\begin{aligned} |u_n - 2| < \varepsilon &\iff \left| 2 - \frac{(-1)^n}{n} - 2 \right| < \varepsilon \\ &\iff \left| -\frac{(-1)^n}{n} \right| < \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{n} < \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{\varepsilon} < n \end{aligned}$$

■ DÉFINITION :

On dit que la suite (u_n) **converge vers le nombre réel** ℓ si quel que soit le réel strictement positif ε , il existe un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Exemple :

Soit v une suite arithmétique de raison 3. v ne converge pas. Supposons que v converge vers une limite ℓ . Alors, il existe un entier N tel que tous les termes de v à partir du rang N appartiennent à $]\ell - 1 ; \ell + 1[$. En particulier, $v_N \in]\ell - 1 ; \ell + 1[$, c'est-à-dire

$$\ell - 1 < v_N < \ell + 1$$

Or, $v_{N+1} = v_N + 3$, d'où

$$\ell + 2 < v_{N+1} < \ell + 4$$

Mais $\ell + 1 < \ell + 2$ donc $v_{N+1} \notin]\ell - 1 ; \ell + 1[$. Ceci contredit l'hypothèse : (v_n) ne converge donc pas.

■ DÉFINITION :

Si une suite ne converge pas, alors on dit qu'elle **diverge**.

■ PROPRIÉTÉ :

Si une suite converge, alors sa limite est unique.

Démonstration. Soit (u_n) une suite. On suppose que (u_n) converge vers deux limites distinctes $\ell \neq \ell'$.

Posons $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{4}$.

Alors, il existe N tel que pour tout $n \geq N$,

$$u_n \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$$

Et il existe N' tel que pour tout $n \geq N'$,

$$u_n \in]\ell' - \varepsilon; \ell' + \varepsilon[$$

Ainsi, pour tout $n \geq \max(N, N')$, on doit avoir

$$u_n \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[\cap]\ell' - \varepsilon; \ell' + \varepsilon[.$$

Mais, $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[\cap]\ell' - \varepsilon; \ell' + \varepsilon[= \emptyset$. C'est donc impossible! Donc u ne peut pas avoir deux limites distinctes. $\square$

■ PROPRIÉTÉ :

Si une suite converge, alors elle est bornée.

Démonstration. Si u converge vers un réel ℓ , alors il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - \ell| < 42$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$\ell - 42 < u_n < \ell + 42$$

Par ailleurs, les termes $u_0, u_1, \dots, u_N$ sont en nombre fini. L'un d'eux est plus grand (respectivement plus petit) que tous les autres. On pose $M = \max(u_0, \dots, u_{N-1})$ et $m = \min(u_0, \dots, u_{N-1})$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \min(m, \ell - 42) < u_n \leq \max(M, \ell + 42),$$

ce qui prouve que u est bornée. $\square$

Remarques :

- Une suite bornée n'est pas forcément convergente (on détaillera ce cas à la partie C)
- Par contraposée, une suite non bornée est divergente.

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Les suites de termes généraux $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ et plus généralement $\frac{1}{n^q}$ pour tout entier naturel q non nul convergent vers 0.

La suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0.

On pourra sans justification utiliser la convergence vers 0 de ces suites.

En pratique, pour montrer qu'une suite converge, on n'utilise rarement la définition, mais plutôt ces exemples fondamentaux et plusieurs théorèmes :

■ THÉORÈME :

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$ alors

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$
- Si $\ell' \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\ell}{\ell'}$

Démonstration. (Limite d'une somme)

Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons un entier N tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n + v_n - (a + b)| < \varepsilon$$

u et v sont convergentes donc il existe K et L tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq K \implies |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq L \implies |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus, pour tout n ,

$$\begin{aligned} |u_n + v_n - (a + b)| &= |(u_n - a) + (v_n - b)| \\ &\leq |u_n - a| + |v_n - b| \end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire.

Ainsi, pour tout $n \geq \max(K, L)$:

$$\begin{aligned} |u_n + v_n - (a + b)| &\leq |u_n - a| + |v_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

On peut donc choisir $N = \max(K, L)$, ce qui montre la convergence de $u + v$ vers $a + b$. $\square$

Exemple :

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}\right)$

On sait que

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2} = 0$

Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}\right) = 3$.

Exemple :

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

On sait que

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$.

De plus,

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 3$.

Par limite de produit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 6.$$

Exemple :

La suite $\left(\frac{3n^2 - 4}{2n^2 + 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Pour $n \neq 0$,

$$\frac{3n^2 - 4}{2n^2 + 1} = \frac{3n^2 \left(1 - \frac{4}{3n^2}\right)}{2n^2 \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)} = \frac{3}{2} \times \frac{1 - \frac{4}{3n^2}}{1 + \frac{1}{2n^2}}$$

- Au numérateur : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{4}{3n^2} = 0$ et par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{4}{3n^2} = 1$.

- Au dénominateur : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2n^2} = 0$ et par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2n^2} = 1$.

Par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \times \frac{1 - \frac{4}{3n^2}}{1 + \frac{1}{2n^2}} = \frac{3}{2}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 4}{2n^2 + 1} = \frac{3}{2}$ et la suite $\left(\frac{3n^2 - 4}{2n^2 + 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

B. Suites divergentes vers $+\infty$

Exemple :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.

Peut-on trouver un entier p tel que, pour tout entier $n \geq p$, $u_n > 10^4$?

On cherche p tel que, pour tout $n \geq p$, $n^2 > 10^4$, donc tel que $n > 10^2$.

Notons $p = 10^2 - 1$. Soit $n \geq p$, alors $n \geq 10^2 - 1$. Donc $n > 10^2$. Ainsi, pour tout $n \geq p$, $n^2 \geq 10^4$.

Peut-on trouver un entier p tel que, pour tout entier $n \geq p$, $u_n > 10^{90}$?

Par le même raisonnement, pour $p = 10^{45} - 1$, on a pour tout $n \geq p$, $u_n \geq 10^{90}$.

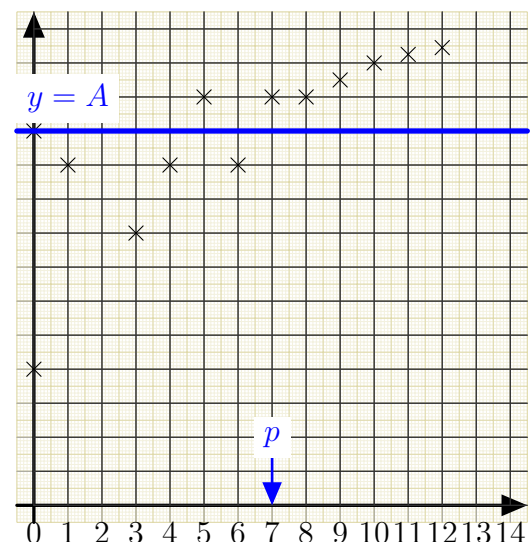
Peut-on trouver un entier p tel que, pour tout entier $n \geq p$, $u_n > A$, où A est un nombre positif quelconque, aussi grand que l'on veut ?

Par le même raisonnement, pour $p = \sqrt{A} - 1$, on a pour tout $n \geq p$, $u_n \geq A$.

On dit alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (quand n tend vers $+\infty$). Plus généralement :

■ DÉFINITION :

On dit que **la suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $[A ; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang p .



Notation : On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Cette définition se réécrit formellement :

■ DÉFINITION :

Soit $A \in \mathbb{R}$. On dit que u tend vers $+\infty$ si il existe un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n > A$$

Exemple :

Montrer qu'une suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison $r > 0$ tend vers $+\infty$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 3. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + rn$. On sait que :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 = u_0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, et par limite de produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} rn = +\infty$

Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple :

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \sqrt{n}$. Montrer que cette suite diverge vers $+\infty$.

Soit A un réel positif. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq A^2 \implies \sqrt{n} \geq A$$

par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$. Ceci montre que u_n tend vers $+\infty$

Comme précédemment, en pratique, on utilise plutôt quelques théorèmes que la définition :

■ THÉORÈME :

Les suites de termes généraux n , n^2 et plus généralement n^q pour tout entier naturel q non nul tendent vers $+\infty$. La suite de terme général $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$.

■ DÉFINITION :

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, lorsque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$$

Exemple :

On note, par exemple $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3) = -\infty$

Exemple :

Montrer qu'une suite (u_n) arithmétique de raison $r < 0$ tend vers $-\infty$.

La suite $(-u_n)$ est arithmétique de raison $-r$ positive. Elle tend vers $+\infty$ donc (u_n) tend vers $-\infty$.

Remarques :

- Une suite majorée ne peut pas tendre vers $+\infty$
- Une suite minorée ne peut pas tendre vers $-\infty$
- Une suite qui tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$

Remarque : Attention au vocabulaire : une suite qui diverge ne tend pas forcément vers $+\infty$ ou $-\infty$.

La suite $(-1)^n$ est divergente et bornée.

C. Autre cas

Exemple :

Intéressons-nous à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$.

Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ , alors l'intervalle $\left] \ell - \frac{1}{2} ; \ell + \frac{1}{2} \right[$ par exemple, doit contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p , donc en particulier contenir 1 et -1. Mais cet intervalle a une amplitude de 1, donc il ne peut pas contenir simultanément -1 et 1, qui sont distants de 2. Donc il y a une contradiction, et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, elle diverge.

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors l'intervalle $[1 ; +\infty[$ doit contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Mais cet intervalle ne contient pas -1. Donc la suite ne tend pas vers $+\infty$. De même, elle ne tend pas vers $-\infty$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge et n'a pas de limite.

D. Cas particulier des suites géométriques

■ PROPRIÉTÉ : Inégalité de Bernoulli

Soit x un réel positif. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Démonstration. On note f la fonction $x \mapsto (1+x)^n$. f est une fonction polynôme donc deux fois dérivable sur $[0 ; +\infty[$. On a, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$,

- $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$
- $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$

Soit $x \geq 0$. On a $(1+x)^{n-1} > 0$ et donc $f''(x) \geq 0$. Ainsi, f est convexe sur $[0 ; +\infty[$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, si $n = 1$, la fonction f est également concave sur $[0 ; +\infty[$.

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée $\mathcal{T}_0$, a pour équation $\mathcal{T}_0 : y = f(0) + f'(0)(x-0)$ On a $f(0) = 1$ et $f'(0) = n$. D'où, $\mathcal{T}_0 : y = 1 + n(x-0)$, c'est-à-dire $\mathcal{T}_0 : y = 1 + nx$.

f est convexe sur $[0 ; +\infty[$, ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier de $\mathcal{T}_0$. Ainsi, on a bien, pour tout $x \geq 0$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

□

■ THÉORÈME :

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$, la suite est constante et sa limite est 1.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq -1$, alors la suite de terme général q^n n'a pas de limite.

Démonstration.

- Si $q > 1$,

on pose $x = q - 1$, où $x > 0$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. On a

$$1 + nx > A \iff n > \frac{A-1}{x} \text{ car } x > 0.$$

Choisissons un entier N strictement supérieur à $\frac{A-1}{x}$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n \geq N \implies n > \frac{A-1}{x} \implies 1 + nx > A$$

Or, d'après l'inégalité de Bernoulli (comme $x > 0$),

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n \geq N &\implies (1+x)^n \geq 1 + nx > A \\ &\implies q^n > A \end{aligned}$$

Ceci montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

- Si $q = 0$ la suite (q^n) est constante, égale à 0.
- Si $-1 < q < 1$ et $q \neq 0$,
on a $0 < |q| < 1$ et $\frac{1}{|q|} > 1$. Ainsi, d'après le premier point,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|q|^n} = +\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que pour n'importe quel réel A , il existe un rang N tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq N \implies \frac{1}{|q|^n} > A.$$

On écrit cette propriété pour $A = \frac{1}{\varepsilon}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq N \implies \frac{1}{|q|^n} > \frac{1}{\varepsilon} \implies |q|^n < \varepsilon$$

Ceci prouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} |q^n| = 0$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

- Si $q < -1$, alors $|q| > 1$ et on sait alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} |q^n| = +\infty$$

La suite (q^n) ne peut pas converger vers une limite ℓ (sinon $(|q^n|)$ convergerait vers $|\ell|$). De plus, q^n change de signe selon la parité de n , donc (q^n) ne peut tendre ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.

- Si $q = -1$, on a vu que la suite alternée $(-1)^n$ n'a pas de limite.

□

Exemple :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = 10^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On a $-1 < \frac{1}{2} < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Exemple :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(\frac{7}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $\left(\frac{7}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{7}{2} \times \frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{7}{6}\right)^n$.

$1 < \frac{7}{6}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^n = +\infty$, et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = +\infty$$

⚠ Attention

On vient de montrer avec l'exemple précédent que le produit d'une suite tendant vers 0 par une suite tendant vers $+\infty$ n'est pas nécessairement une suite qui tend vers 0.

Exemple :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = 5 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$$

On a $-1 < \frac{1}{3} < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

Par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$

Par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] = 5$

D. Limites et opérations

On admet les théorèmes suivants. Dans les tableaux ci-dessous, ℓ et ℓ' sont deux nombres réels. ? signifie qu'on ne peut pas *a priori* donner de résultat : il s'agit d'une **forme indéterminée** ; il faudra déterminer la limite, si elle existe, par d'autres techniques.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+$ signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ de sorte qu'au voisinage de $+\infty$, $v_n > 0$.

■ THÉORÈME : Limite d'une somme

$(u_n) \backslash (v_n)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	??
$-\infty$	$-\infty$	??	$-\infty$

■ THÉORÈME : Limite d'un produit

$(u_n) \backslash (v_n)$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	$\ell \times \ell'$			$+\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$				$-\infty$	$+\infty$
$\ell = 0$				??	
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	??	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$

■ THÉORÈME : Limite d'un quotient

$(v_n) \backslash (u_n)$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' = 0$		$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$		$+\infty$	$-\infty$	0	
$\ell < 0$			$-\infty$	$+\infty$		
$\ell = 0$			??			
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	??	
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$		

Remarque : Les cas « **formes indéterminées** » sont parce que de telles formes peuvent conduire, selon les cas, à des réponses différentes.

Exemples :

Les trois limites suivantes sont celles du produit d'une suite de limite $+\infty$ par une suite de limite 0 :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 \times \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \times \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \times \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$

Les trois limites calculées sont différentes : on ne peut donc donner aucun résultat général de ce type de limite.

On peut trouver de tels exemples pour chacune des quatre formes indéterminées signalées par un ?.

Exemple :

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (v_n) de terme général

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

On a une forme indéterminée. On va utiliser la quantité conjuguée pour la lever. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

On a

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Par limite de sommes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty$.

Par limite d'inverse,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0^+$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+$$

E. Théorème de comparaison

■ THÉORÈME : de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang N , $v_n \leq u_n$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Démonstration. Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ supérieure à partir d'un certain rang à une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$.

- On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, donc pour tout réel A , il existe un entier N tel que, si $n > N$, alors $v_n \in]A, +\infty[$ par définition de la divergence.

De plus, on sait que $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang.

Notons p ce rang. On note $\max(N, p)$ le plus grand des entiers entre N et p .

Donc, si $n > \max(N, p)$, alors $u_n \in]A, +\infty[$.

Par définition de la divergence, on en conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

- On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, donc pour tout réel A , il existe un entier N tel que, si $n > N$, alors $u_n \in]-\infty, A[$.

De plus, on sait que $v_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang.

Notons p ce rang. On note $\max(N, p)$ le plus grand des entiers entre N et p .

Donc, si $n > \max(N, p)$, alors $v_n \in]-\infty, A[$.

Par définition de la divergence, on en conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$$

□

Exemple :

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite

$$(n + \sin n)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que $n + \sin n \geq n - 1$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = +\infty$.

Donc, par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} = +\infty$

■ THÉORÈME : des gendarmes

Soient (v_n) et (w_n) deux suites convergeant vers un même réel ℓ . Soit u une suite telle qu'à partir d'un certain rang N ,

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

Alors, (u_n) est une suite convergente et sa limite est ℓ .

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{5 - 4(-1)^n}{3 + 2n}$. Est-elle convergente? Déterminer sa limite éventuelle.

On ne peut pas conclure en utilisant les opérations sur les limites. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{3 + 2n} \leq u_n \leq \frac{9}{3 + 2n}$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 + 2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{3 + 2n} = 0.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Démonstration. Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites. Supposons que (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ , où $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons également qu'à partir d'un certain rang N_1 , $u_n \leq v_n \leq w_n$ (*).

D'après la définition de la convergence d'une suite :

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_3 \in \mathbb{N}, n \geq N_3 \implies |w_n - \ell| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si l'on considère $\max(N_2, N_3)$, on a :

$$\begin{cases} |u_n - \ell| \leq \varepsilon \\ |w_n - \ell| \leq \varepsilon \end{cases} \implies \begin{cases} \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon \\ \ell - \varepsilon \leq w_n \leq \ell + \varepsilon \end{cases} \quad (**)$$

On peut fusionner (*) et (**) en considérant $N = \max(N_1, N_2, N_3)$:

$\forall n > N, \ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$, ce qui implique $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |v_n - \ell| \leq \varepsilon$$

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$$

□