

Exercice VI.1

Fait et corrigé en classe (19 décembre 2024)

Exercice VI.2

① $d_1: 4x - y + 8 = 0$

Donc $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_1 .

② $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_2 .

③ $d_3: -9x - 2 = 0$

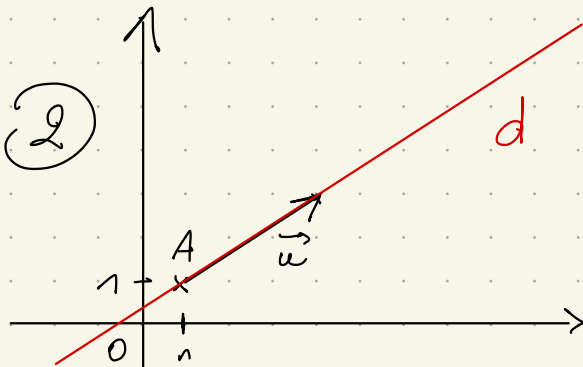
Donc $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_3 . ($\vec{u}$ aussi...)

④ $d_4: 5x + 2y - 3 = 0$

Donc $\vec{u}_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_4 .

Exercice VI.3

① Le point $A(1; 1)$ appartient à d . ② $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .



③ On a $2 \times 7 - 3 \times 5 + 1 = 0$.

Donc les coordonnées de B vérifient l'égalité.

Ainsi B est un point de la droite d .

Exercice VI.4

① Un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de d_2 est $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}_1; \vec{u}_2) &= -1 \times 1 - (-5) \times 7 \\ &= -1 + 35 \\ &= 34 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires.

Donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

② Un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de d_2 est $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}_1; \vec{u}_2) &= -3 \times (-4) - (-6) \times 2 \\ &= 12 + 12 \\ &= 24 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires.

Donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

Exercice V1.5

① (a) Une équation cartésienne de d est de la forme
 $4x - 5y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$.

$$A(1; -2) \in d \Leftrightarrow 4 \times 1 - 5 \times (-2) + c = 0$$
$$\Leftrightarrow c = -14$$

Donc une équation cartésienne de d est $4x - 5y - 14 = 0$

① (b) Une équation cartésienne de d est de la forme
 $3x + y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$.

$$A(-2; 3) \in d \Leftrightarrow 3 \times (-2) + 3 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow c = 3$$

Donc une équation cartésienne de d est $3x + y + 3 = 0$

② (a) Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6-1 \\ 2-3 \end{pmatrix}$,
ie $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de (AB) est de la forme

$$-x - 5y + c = 0 \quad \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

$$A(1; 3) \in (AB) \Leftrightarrow -1 - 5 \times 3 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 16$$

Donc une équation cartésienne de (AB) est $-x - 5y + 16 = 0$

② (b) Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3+2 \\ 8-4 \end{pmatrix}$,
ie $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de (AB) est de la forme

$$4x - 5y + c = 0 \quad \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

$$A(-2; 4) \in (AB) \Leftrightarrow 4 \times (-2) - 5 \times 4 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 28$$

Donc une équation cartésienne de (AB) est $4x - 5y + 28 = 0$

③ (a) Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$,
ie $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d est parallèle à (AB) , donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d .

Une équation cartésienne de d est de la forme

$$2x + c = 0 \quad \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

$$C(0;0) \in d \Leftrightarrow 2 \times 0 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow c = 0$$

Donc une équation cartésienne de d est $2x = 0$
ie $x = 0$.

③ (b) Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$,
ie $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$.

d est parallèle à (AB) , donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d .

Une équation cartésienne de d est de la forme

$$-7x + 3y + c = 0 \quad \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

$$C(5;-3) \in d \Leftrightarrow -7 \times 5 + 3 \times (-3) + c = 0$$
$$\Leftrightarrow c = 44$$

Donc une équation cartésienne de d est $-7x + 3y + 44 = 0$

Exercice VI.6

$$\textcircled{1} \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = 4 \times 3 + (-3) \times 4$$
$$= 0$$

Donc $\vec{u}$, un vecteur directeur de d , est orthogonal à $\vec{n}$.

Ainsi $\vec{n}$ est un vecteur normal à d .

$\textcircled{2}$ On sait que $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d .

$$\det(\vec{n}, \vec{n}_1) = \begin{vmatrix} -5 & 14 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \times 10 - 7 \times 14$$

$$= -148.$$

$$\neq 0$$

$\vec{n}$ et $\vec{n}_1$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi $\vec{n}$ n'est pas un vecteur normal à d .

Exercice VI.7 fait et corrigé en cours (19 décembre 2024)

Exercice VI.8:

Équation de droite	Vecteur directeur	Vecteur normal
① $-2x + y + 6 = 0$	$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
② $-x - y + 5 = 0$	$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
③ $3x + 6 = 0$	$\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
④ $-5y - 15 = 0$	$\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

Exercice VI.9

① $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3+3 \\ -2-2 \end{pmatrix}$, ie $\vec{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB)

Ainsi $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (AB)

② $\vec{AB} \begin{pmatrix} -3-0 \\ -12+1 \end{pmatrix}$, ie $\vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB)

Ainsi $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (AB)

Exercice VI.10

① $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

② $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$,
donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

③ $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

④ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4} \Leftrightarrow 4y = -2x + 7$
 $\Leftrightarrow -2x - 4y + 7 = 0.$

Donc $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$

Exercice VI.11

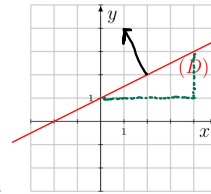
① Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est de la forme
 $3x - 2y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}.$

$$A(2; -1) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow 3 \times 2 - 2 \times (-1) + c = 0$$
$$\Leftrightarrow c = -8$$

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $3x - 2y + 8 = 0$

Exercice VI.10

Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite D dans chacun des cas suivants :



1.

2. D passe par le point $A(5; 1)$ et a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

3. Une équation cartésienne de D est

$$5x - 4y + 6 = 0$$

4. L'équation réduite de D est $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}.$

② Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est de la forme
$$\frac{1}{2}x + 3y + c = 0 \quad \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

$$A(0; -5) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 0 + 3 \times (-5) + c = 0 \\ \Leftrightarrow c = 15$$

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $\frac{1}{2}x + 3y + 15 = 0$.

③ Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est de la forme
$$y + c = 0 \quad \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

$$A(-1; -3) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow -1 \times 0 - 3 + c = 0 \\ \Leftrightarrow c = 3$$

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $y + 3 = 0$.

Exercice VI.12

① $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d .

$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

② Δ est perpendiculaire à d , donc un vecteur directeur de d est un vecteur normal de Δ . Ainsi, une équation cartésienne de Δ est de la forme $2x + 2y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Puis, } A(2; 3) \in \Delta \Leftrightarrow 2 \times 2 + 2 \times 3 + c = 0 \\ \Leftrightarrow c = -10$$

Donc une équation cartésienne de Δ est $2x + 2y - 10 = 0$.

Exercice VI.13

Soit I le milieu du segment $[AB]$. Alors

$$I\left(\frac{22+17}{2}; \frac{53+12}{2}\right)$$

$$\text{ie } I\left(\frac{39}{2}; \frac{65}{2}\right).$$

On cherche une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$, ie de la droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par I . Notons Δ cette droite

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB) , et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 17-22 \\ 12-53 \end{pmatrix}$, ie $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ -41 \end{pmatrix}$. Ainsi $\vec{n} \begin{pmatrix} -41 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ .

Une équation cartésienne de Δ est donc de la forme
 $-41x + 5y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Enfin, } I \in \Delta \Leftrightarrow -41 \times \frac{39}{2} + 5 \times \frac{65}{2} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 637$$

Donc une équation cartésienne de Δ , la médiatrice de $[AB]$, est $-41x + 5y + 637 = 0$

Exercice V1.14

① $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (BC) .

Ainsi une équation cartésienne de d est de la forme
 $-4x + 3y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Puis, } A(1;4) \in d \Leftrightarrow -4 + 3 \times 4 + c = 0 \\ \Leftrightarrow c = -8$$

Donc une équation cartésienne de d est $-4x + 3y - 8 = 0$

② $\vec{BC}$ est un vecteur directeur de (BC) .

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} -5-2 \\ 3+1 \end{pmatrix}, \text{ ie } \vec{BC} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi une équation cartésienne de d est de la forme
 $-7x + 4y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Puis, } A(0;3) \in d \Leftrightarrow -7 \times 0 + 4 \times 3 + c = 0 \\ \Leftrightarrow c = -12$$

Donc une équation cartésienne de d est $-7x + 4y - 12 = 0$

3) $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (BC)
car d est parallèle à l'axe des ordonnées.

Ainsi une équation cartésienne de d est de la forme
 $y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Puis, } A(-5; 7) \in d \Leftrightarrow 7 + c = 0 \\ \Leftrightarrow c = -7$$

Donc une équation cartésienne de d est $y - 7 = 0$

Exercice VI.15

1) Une équation cartésienne de d est de la forme $2x - y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{De plus, } A \in d \Leftrightarrow 2 \times 4 - 3 + c = 0 \\ \Leftrightarrow c = -5$$

Donc une équation cartésienne de d est $2x - y - 5 = 0$

2) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d , donc un vecteur normal à d' .

Une équation cartésienne de d' est donc de la forme $x + 2y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{De plus, } A \in d' \Leftrightarrow 4 + 2 \times 3 + c = 0 \\ \Leftrightarrow c = -10$$

Donc une équation cartésienne de d' est $x + 2y - 10 = 0$

③ d'' est parallèle à d , donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d'' .

Ainsi, une équation cartésienne de d'' est de la forme $2x - y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.

$$O(0;0) \in d'' \Leftrightarrow c = 0$$

Donc une équation cartésienne de d'' est $2x - y = 0$.

Exercice VI.16

① $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D_1 .

$\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D_2 .

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= 2 \times 5 + 8 \times (-7) \\ &= 10 - 56 \\ &= -46 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Donc $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas orthogonaux et les droites D_1 et D_2 ne sont pas perpendiculaires.

② $\vec{u} \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_1 .

$\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_2 .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux et les droites D_1 et D_2 ne sont pas perpendiculaires.

3) $\mathcal{D}_1: 8x - y - 5 = 0$ $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$.

$\vec{AB} \begin{pmatrix} 6+2 \\ -1-0 \end{pmatrix}$, ie $\vec{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$.

$$\vec{w} \cdot \vec{AB} = 1 \times 8 - 1 \times 8$$

$$= 0$$

Donc $\vec{w}$ et $\vec{AB}$ sont orthogonaux et les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles.

Exercice VI.17

1) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d_1 , donc un vecteur directeur de d_2 . Ainsi une équation cartésienne de d_2 est de la forme $3x - y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

$$A \in d_2 \Leftrightarrow 3 \times 2 - 6 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 0.$$

Donc une équation cartésienne de d_2 est $3x - y = 0$

2) On cherche une équation cartésienne de (AH) .

(AH) est perpendiculaire à d_1 , et un vecteur normal à d_1 est $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\vec{n}_1$ est un vecteur directeur de (AH) .

Ainsi une équation cartésienne de (AH) est

$$3x - y + c = 0 \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{et } A \in (AH) &\Leftrightarrow 3 \times 2 - 6 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 0 \end{aligned}$$

Ainsi une équation cartésienne de (AH) est $3x - y = 0$

• Déterminons les coordonnées de H , intersection de (AH) et d_1 .
C'est d_2 !

$$H \in (AH) \cap d_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 10x = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{10} \\ y = \frac{21}{10} \end{cases}$$

Donc $H\left(0,7; \frac{21}{10}\right)$.

Exercice VI.18 Fait et corrigé en classe le 19 décembre 2024.

Exercice VI.19

1 a) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$

ie $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 16$

ie $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

b) $(x+1)^2 + (y+\frac{2}{3})^2 = 3$

ie $x^2 + 2x + 1 + y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = 3$

ie $x^2 + y^2 + 2x + \frac{4}{3}y - \frac{14}{9} = 0$

2 a) La distance ΩA est 2. Donc le rayon du cercle est 2.

Une équation cartésienne du cercle est $x^2 + y^2 = 4$,

ie $x^2 + y^2 - 4 = 0$

b) La distance ΩA est $\sqrt{(-1-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

Une équation cartésienne du cercle est donc

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$

ie $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 8$

ie $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$

Exercice VI.19

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation du cercle dont on donne des éléments caractéristiques.

1. Le centre Ω et le rayon r .

(a) $\Omega(2; 3)$ et $r = 4$.

(b) $\Omega(-1; -\frac{2}{3})$ et $r = \sqrt{3}$.

2. Le centre Ω et un point A du cercle.

(a) $\Omega(0; 0)$ et $A(0; 2)$

(b) $\Omega(1; 2)$ et $A(-1; 4)$

Exercice VI.20 Notons $\mathcal{C}$ ce cercle.

Une équation du cercle $\mathcal{C}$ est $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$

$$\textcircled{1} \text{ On a } (0+2)^2 + (0-1)^2 = 4 + 1 \\ = 5 \\ \neq 9$$

Donc O n'appartient pas au cercle $\mathcal{C}$.

$$\textcircled{2} \text{ On a } (3+2)^2 + (3-1)^2 = 5^2 + 2^2 \\ = 25 + 4 \\ = 29 \\ \neq 9$$

Donc B n'appartient pas au cercle $\mathcal{C}$.

Exercice VI.21: Fait et corrigé en classe le 19 décembre 2024.

Exercice VI.22 Soit $\mathcal{C}$ le cercle considéré.

$$\textcircled{1} \text{ La distance } AB \text{ est } d = \sqrt{(5-1)^2 + (-2-1)^2} \\ = \sqrt{4^2 + (-3)^2} \\ = \sqrt{25} \\ = 5$$

Donc $\mathcal{C}$ est un cercle de diamètre 5, donc de rayon $\frac{5}{2}$.

Déterminons les coordonnées de I , milieu de $[AB]$.

$$I\left(\frac{1+5}{2}; \frac{1-2}{2}\right)$$

Ainsi $I\left(3; -\frac{1}{2}\right)$

Donc I est le centre du cercle $\mathcal{C}$ de rayon $\frac{5}{2}$.

Ainsi une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est

$$(x-3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

ie $x^2 - 6x + 9 + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

ie $x^2 + y^2 - 6x + y + 9 + \frac{1}{4} - \frac{25}{4} = 0$

ie $x^2 + y^2 - 6x + y - 3 = 0$

2) Traité à la question précédente.

Exercice VI.23

Soient $A(-1; 3)$, $B(5; 0)$ et $C(9; 3)$

1) La droite (AB) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5+1 \\ 0-3 \end{pmatrix}$,
ie $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Ainsi (AB) admet une équation cartésienne de la forme

$$-3x - 6y + c = 0, \quad \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

Puis, $B \in (AB)$, c'est-à-dire $-3 \times 5 - 6 \times 0 + c = 0$

$$\text{ie } -15 + c = 0$$

$$\text{ie } c = 15.$$

Donc (AB) admet comme équation cartésienne $-3x - 6y + 15 = 0$.

2) La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc
une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ est de la forme

$$-x + 3y + c = 0 \quad \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

$C \in \mathcal{D}$, c'est-à-dire $-9 + 3 \times 3 + c = 0$.

$$\text{ie } c = 0.$$

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $-x + 3y = 0$.

3) Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) = 6 \times (-1) - (-3) \times (-3) \\ = -15.$$

$$\neq 0.$$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.

4) $E(3;1)$ appartient à (AB) . En effet:

$$-3 \times 3 - 6 \times 1 + 15 = 0$$

$E(3;1)$ appartient à $\mathcal{D}$. En effet:

$$-3 + 3 \times 1 = 0.$$

Donc $E \in (AB) \cap \mathcal{D}$ et donc E est le point d'intersection des droites (AB) et $\mathcal{D}$.

5) Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 6 \times (-3) + (-1) \times (-3)$$

$$= -18 + 3$$

$$= -15$$

$$\neq 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux,
donc les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas
perpendiculaires.

6) On a $AE = 2\sqrt{5}$ et $EC = 2\sqrt{10}$.

De plus, $\overrightarrow{EA} \begin{pmatrix} -1-3 \\ 3-1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 9-3 \\ 3-1 \end{pmatrix}$, ie $\overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc } \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC} = -4 \times 6 + 2 \times 2$$

$$= -24 + 4$$

$$= -20$$

$$\text{et } \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC} = EA \times EC \times \cos(\widehat{AEC})$$
$$= 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{10} \times \cos(\widehat{AEC})$$

$$A_{msi} - 20 = 4\sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \cos(\hat{AEC})$$

$$\text{ie } -5 = 5\sqrt{2} \cos(\hat{AEC})$$

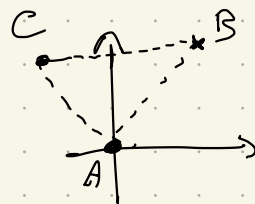
$$\text{ie } -1 = \sqrt{2} \times \cos(\hat{AEC})$$

$$\text{ie } -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\hat{AEC})$$

$$\text{ie } \cos(\hat{AEC}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc } \hat{AEC} = 135^\circ$$

Exercice VI.24



Soient $A(0;0)$, $B(5;6)$ et $C(-1;5)$.

1) La hauteur issue de C est la droite perpendiculaire à (AB) passant par C.

(AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-0 \\ 6-0 \end{pmatrix}$, ie $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi, un vecteur normal à (AB) est $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Or, un vecteur normal à (AB) est un vecteur directeur de la hauteur dont on cherche l'équation.

Notons $\mathcal{D}$ cette hauteur.

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est le vecteur $\vec{n}$,

ainsi une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est de la forme

$$-5x - 6y + c = 0. \quad \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

Or, $C \in \mathcal{D}$, ie $-5 \times (-1) - 6 \times 5 + c = 0$

$$\text{ie } 5 - 30 + c = 0.$$

$$\text{ie } -25 + c = 0$$

$$\text{ie } c = 25.$$

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $-5x - 6y + 25 = 0$, ou $5x + 6y - 25 = 0$.

2) Par un raisonnement analogue, en notant $\mathcal{D}'$ la hauteur issue de B:

Un vecteur directeur de (AC) est $\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (AC) .

donc un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$.

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}'$ est de la forme
$$x - 5y + c = 0 \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Or, $B \in \mathcal{D}'$, ie $5 - 5 \times 6 + c = 0$

$$\text{ie } 5 - 30 + c = 0$$

$$\text{ie } -25 + c = 0$$

$$\text{ie } c = 25$$

Donc $\mathcal{D}'$ a pour équation cartésienne

$$x - 5y + 25 = 0.$$

3) Déterminons les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Notons-le I .

$$I(x; y) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6y - 25 = 0 \\ x - 5y + 25 = 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{S})$ le système $\begin{cases} 5x + 6y - 25 = 0 \\ x - 5y + 25 = 0 \end{cases}$.

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6y = 25 \\ 5x - 25y = -125 \end{cases}$$

Ainsi $31y = 150$, donc $y = \frac{150}{31}$.

On remplace : $x - 5 \times \frac{150}{31} + 25 = 0$

$$\Leftrightarrow x - \frac{750}{31} + \frac{775}{31} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{25}{31}$$

Ainsi le point d'intersection des deux hauteurs est $I\left(-\frac{25}{31}; \frac{150}{31}\right)$.

Puisque les trois hauteurs sont concourantes en un point, I est l'orthocentre du triangle ABC .

Exercice Vi.25:

1) Soit y l'ordonnée cherchée.

$$\begin{aligned} B(7; y) \in d &\Leftrightarrow 7 - 3y - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 - 3y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 1. \end{aligned}$$

Donc $B(7; 1)$.

2) Un vecteur normal à d est $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3) Δ est perpendiculaire à d , donc un vecteur normal à d est un vecteur directeur de Δ .

Ainsi une équation cartésienne de Δ est de la forme $-3x - y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$.

$$A \in \Delta, \text{ ie } -3 \times 3 - 1 + c = 0$$

$$\text{ie } -9 - 1 + c = 0$$

$$\text{ie } -10 + c = 0$$

$$\text{ie } c = 10.$$

Donc une équation cartésienne de Δ est:

$$-3x - y + 10 = 0.$$

4e) On note H le projeté orthogonal de A sur (d) .

- AH est donc la distance entre A et son projeté orthogonal sur (BC) .

- Remarquons que (Δ) et (AH) sont confondues.

Déterminons l'intersection de (d) et (AH) .

$$H(x, y) \in (d) \cap (AH) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ -3x - y + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 9y - 12 = 0 \\ -3x - y + 10 = 0 \end{cases}$$

Donc $-10y - 12 = 0$, ie $y = \frac{-12}{-10}$

Puis, on remplace :

$$x - 3 \times \left(\frac{-12}{-10} \right) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 0,6 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3,4.$$

Donc $H(3,4; -0,2)$

et la distance AH est

$$AH = \sqrt{(3,4 - 3)^2 + (-0,2 - 1)^2}$$

$$= \sqrt{0,4^2 + (-1,2)^2}$$

$$= \sqrt{0,16 + 1,44}$$

$$AH = \sqrt{1,6}$$

Exercice Vi. 26

$$1) (a) \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 3+1 \end{pmatrix}, \text{ ie } \vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1+1 \end{pmatrix}, \text{ ie } \vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2 \times 1 + 4 \times 2$$
$$\text{ie } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6$$

$$(b) \quad \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} \quad \left| \quad \|\vec{AC}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} \right.$$
$$= \sqrt{4+16} \quad \left| \quad = \sqrt{1+4} \right.$$
$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{20} \quad \left| \quad \|\vec{AC}\| = \sqrt{5} \right.$$

$$(c) \quad \text{On sait que } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$$
$$\text{ie } 6 = \sqrt{20} \times \sqrt{5} \times \cos(\widehat{BAC})$$
$$\text{ie } 6 = \sqrt{100} \times \cos(\widehat{BAC})$$
$$\text{ie } 6 = 10 \times \cos(\widehat{BAC})$$
$$\text{ie } \frac{3}{5} = \cos(\widehat{BAC})$$

$$\text{Donc } \widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{3}{5}\right), \text{ ie } \widehat{BAC} \approx 53^\circ$$

21 (a) $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de (AB)

Donc une équation cartésienne de (AB) est de la forme $4x + 2y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$.

Puis $B \in (AB)$, ie $4 \times 0 + 2 \times 3 + c = 0$

$$\text{ie } 6 + c = 0$$

$$\text{ie } c = -6.$$

Donc, $4x + 2y - 6 = 0$ est une équation cartésienne de (AB) , ou encore $2x + y - 3 = 0$.

(b) H est le point d'intersection entre (AB) et la hauteur issue de C . Notons $\mathcal{D}$ cette droite.

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est un vecteur normal à (AB) . $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à (AB) .

Ainsi une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est de la forme $x - 2y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$.

Puis, $C \in \mathcal{D}$, ie $3 - 2 \times 1 + c = 0$

$$\text{ie } 3 - 2 + c = 0$$

$$\text{ie } c = -1.$$

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $x - 2y - 1 = 0$

$$H(x; y) \in (AB) \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 2x - 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

Ainsi $5y - 1 = 0$, ie $y = \frac{1}{5}$, ie $y = 0,2$

On remplace, $x - 2 \times \frac{1}{5} - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x - \frac{2}{5} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1,4.$$

Ainsi H a comme coordonnées $(1,4; 0,2)$.

Exercice VI.27

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre $A(2;1)$ et de rayon 5,
donc une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

$$\text{ie } x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25$$

$$\text{ie } x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$$

d a pour équation cartésienne $-x + y + 6 = 0$

Soit $M(x; y)$.

$$M \in \mathcal{C} \cap d \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0 \\ -x + y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0 \\ x = y + 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+6)^2 + y^2 - 4(y+6) - 2y - 20 = 0 \\ x = y + 6 \end{cases}$$

$$M \in \mathcal{C} \cap d \Leftrightarrow \begin{cases} (y+6)^2 + y^2 - 4(y+6) - 2y - 20 = 0 \\ x = y+6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 12y + 36 + y^2 - 4y - 24 - 2y - 20 = 0 \\ x = y+6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 6y - 8 = 0 \\ x = y+6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 3y - 4 = 0 \\ x = y+6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \text{ ou } y = 1 \\ x = y+6 \end{cases}$$

Si $y = -4$, alors $x = 6 - 4 = 2$ et si $y = 1$, alors $x = 1 + 6 = 7$

On obtient deux points d'intersection :

$A(2; -4)$ et $B(7; 1)$