

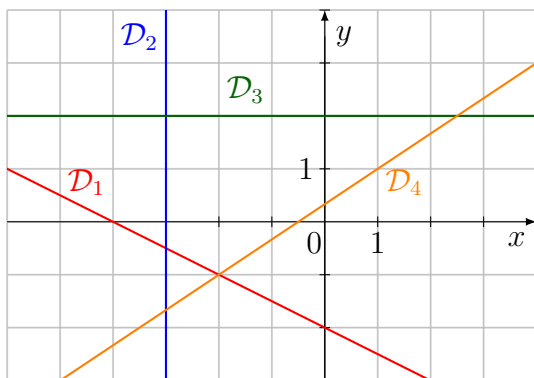
Séquence VI – Applications du produit scalaire

Équations cartésiennes de droites

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice VI.1

- Déterminer par lecture graphique les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites représentées ci-dessous.
- En déduire une équation cartésienne de chacune de ces quatre droites.



Exercice VI.2

Donner un vecteur directeur de chacune des droites suivantes, dont on donne une équation cartésienne.

- $d_1 : y = 4x + 8$
- $d_2 : 4x - 3y + 7 = 0$
- $d_3 : -9x = 2$
- $d_4 : 5x + 2y = 9$

Exercice VI.3

Soit d la droite dont une équation cartésienne est $2x - 3y + 1 = 0$.

- Déterminer un point et un vecteur directeur de d .
- Tracer la droite d dans un repère orthonormé.
- Le point $B(7; 5)$ appartient-il à la droite d ? Justifier.

Exercice VI.4

Préciser dans chacun des cas suivants si les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

- $d_1 : 7x + y - 1 = 0$ et $d_2 : x + 5y - 3 = 0$
- $d_1 : 2x + 3y - 1 = 0$ et $d_2 : -4x + 6y - 3 = 0$

Exercice VI.5

- Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne de la droite d passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
 - $A(1; -2)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$
 - $A(-2; 3)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne de la droite (AB) .
 - $A(1; 3)$ et $B(6; 2)$
 - $A(-2; 4)$ et $B(3; 8)$.
- Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne de la droite d passant par le point C et parallèle à la droite (AB) .
 - $A(1; 4)$, $B(-1; 4)$ et $C(0; 0)$.
 - $A(7; 6)$, $B(4; -1)$ et $C(5; -3)$.

Exercice VI.6

- Soit d la droite passant par $A(-1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ un vecteur du plan. Le vecteur $\vec{n}$ est-il normal à d ?
- Soit d la droite d'équation $-5x + 7y - 2 = 0$. Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur normal de d ?

Exercice VI.7

d est une droite ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$ et pour vecteur normal $\vec{n}$. d' est une droite ayant pour vecteur directeur $\vec{u}'$ et pour vecteur normal $\vec{n}'$. Compléter les phrases suivantes :

- Si les droites d et d' sont parallèles, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont
- Si les droites d et d' sont perpendiculaires, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont
- Si les droites d et d' sont perpendiculaires, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}'$ sont
- Si les droites d et d' sont perpendiculaires, alors $\vec{n}$ est un vecteur d' .
- Si les droites d et d' sont parallèles, alors $\vec{n}$ est un vecteur d' .

Exercice VI.8

Pour chaque droite dont l'équation cartésienne est donnée ci-dessous, indiquer un vecteur directeur et un vecteur normal.

1. $-2x + y + 6 = 0$
2. $y = -x + 5$
3. $3x + 6 = 0$
4. $-5y - 15 = 0$

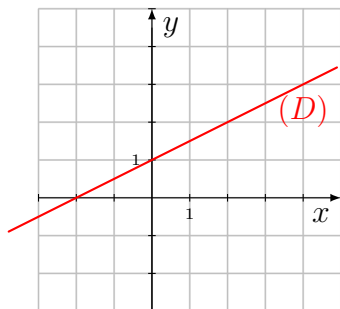
Exercice VI.9

Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite (AB) puis un vecteur directeur de (AB) dans chacun des cas suivants :

1. $A(-3; 2)$ et $B(3; -2)$
2. $A(0; -1)$ et $B(-3; -12)$

Exercice VI.10

Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite D dans chacun des cas suivants :



2. D passe par le point $A(5; 1)$ et a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. Une équation cartésienne de D est

$$5x - 4y + 6 = 0$$

4. L'équation réduite de D est $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$.

Exercice VI.11

Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. $A(2; -1)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
2. $A(0; -5)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
3. $A(-1; -3)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice VI.12

Soit d la droite d'équation cartésienne

$$d : 2x - 2y - 3 = 0$$

et $A(2; 3)$ un point du plan.

1. Trouver un vecteur normal et un vecteur directeur de d .
2. Trouver une équation de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à d .

Exercice VI.13

Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(22; 53)$ et $B(17; 12)$.

Exercice VI.14

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point A et perpendiculaire à la droite (BC) .

1. $A(1; 4)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (BC) .
2. $A(0; 3)$, $B(2; -1)$ et $C(-5; 3)$.
3. $A(-5; 7)$ et la droite (BC) est parallèle à l'axe des ordonnées.

Exercice VI.15

Soit d une droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passant par le point $A(4; 3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de d .
2. Déterminer une équation de la droite d' perpendiculaire à d et passant par A .
3. Déterminer une équation de la droite d'' parallèle à d et passant par l'origine du repère.

Exercice VI.16

Dans chaque cas, déterminer, en justifiant, si les droites D_1 et D_2 sont perpendiculaires.

1. $D_1 : 2x + 8y - 5 = 0$ et $D_2 : 5x - 7y - 6 = 0$
2. D_1 de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $D_2 : \frac{9}{4}x + 2 = 0$
3. $D_1 : y = 8x - 5$ et D_2 passant par les points de coordonnées $A(-2; 0)$ et $B(6; -1)$.

Séquence VI – Applications du produit scalaire

Équations cartésiennes de cercles

Exercice VI.17

d_1 est la droite qui a pour équation cartésienne $x + 3y - 7 = 0$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_2 qui passe par le point $A(2; 6)$ et est perpendiculaire à la droite d_1 .
2. Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite d_1 . Déterminer les coordonnées du point H .

Exercice VI.18

On considère des cercles dont les équations sont données ci-dessous. Pour chacun d'entre eux, déterminer les coordonnées de son centre et la valeur de son rayon.

1. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3$
2. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$
3. $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 4$
4. $x^2 + y^2 = 5$

Exercice VI.19

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation du cercle dont on donne des éléments caractéristiques.

1. Le centre Ω et le rayon r .
 - (a) $\Omega(2; 3)$ et $r = 4$.
 - (b) $\Omega\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$ et $r = \sqrt{3}$.
2. Le centre Ω et un point A du cercle.
 - (a) $\Omega(0; 0)$ et $A(0; 2)$
 - (b) $\Omega(1; 2)$ et $A(-1; 4)$

Exercice VI.20

On considère le cercle de centre $A(-2; 1)$ et de rayon 3.

1. Le point $O(0; 0)$ est-il situé sur ce cercle?
2. Même question pour le point $B(3; 3)$.

Exercice VI.21

Soit (E) l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 9 = 0$.

1. Recopier et compléter les égalités suivantes.
 - (a) $x^2 - 2x = (x - \dots)^2 \dots$
 - (b) $y^2 - 4y = (y - \dots)^2 \dots$
2. En déduire que (E) est un cercle dont on précisera les coordonnées du centre et le rayon.
3. Application : L'équation

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$$

est-elle une équation de cercle? Si oui, déterminer son centre et son rayon.

Exercice VI.22

Soient $A(1; 1)$ et $B(5; -2)$ deux points du plan.

1. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
2. Déterminer les coordonnées de son centre et la valeur de son rayon.

Séquence VI – Applications du produit scalaire

Exercices transversaux

Exercice VI.23

On considère les points $A(-1; 3)$, $B(5; 0)$ et $C(9; 3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point C et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que les droites $\mathcal{D}$ et (AB) ne sont pas parallèles.
4. Montrer que le point $E(3; 1)$ est le point d'intersection de ces deux droites.
5. $\mathcal{D}$ et (AB) sont-elles perpendiculaires ?
6. On donne $AE = 2\sqrt{5}$ et $EC = 2\sqrt{10}$. Calculer la mesure, arrondie au degré près, de l'angle $\widehat{AEC}$.

Exercice VI.24

Soient $A(0; 0)$, $B(5; 6)$ et $C(-1; 5)$ trois points du plan.

1. Justifier qu'une équation cartésienne de la hauteur issue de C du triangle ABC est $5x + 6y - 25 = 0$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B de ce triangle.
3. En déduire les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC .

Exercice VI.25

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(3; 1)$ ainsi que la droite d d'équation cartésienne

$$x - 3y - 4 = 0$$

1. Déterminer les coordonnées du point B d'abscisse 7 appartenant à la droite (d) .
2. Donner un vecteur normal à la droite d .
3. Déterminer une équation de la droite Δ , perpendiculaire à la droite d et passant par le point A .
4. Calculer la distance AH et en donner une interprétation géométrique.

Exercice VI.26

Considérons les points $A(2; -1)$, $B(0; 3)$ et $C(3; 1)$.

1. (a) Vérifier que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6$.
(b) Calculer les valeurs exactes de $\|\vec{AB}\|$ et $\|\vec{AC}\|$.
(c) Vérifier que $\cos(\widehat{BAC}) = 0,6$ et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.
2. (a) Vérifier qu'une équation cartésienne de la droite (AB) est $2x + y - 3 = 0$.
(b) On note H le pied de la hauteur issue du sommet C du triangle ABC . Déterminer les coordonnées du point H .

Exercice VI.27

On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(2; 1)$ et de rayon 5, ainsi que la droite d d'équation

$$-x + y + 6 = 0$$

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de d .

Exercice VI.28

On considère deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, avec $(x_1; y_1; x_2; y_2) \in \mathbb{R}^4$.

1. Créer une fonction Python, qui renvoie `True` si ces deux vecteurs sont colinéaires, `False` sinon.
2. Créer une fonction Python, qui renvoie `True` si ces deux vecteurs sont orthogonaux, `False` sinon.

Exercice VI.29

On considère deux droites d et d' d'équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ces droites soient perpendiculaires.
2. Écrire en langage Python une fonction `perpendiculaire` qui renvoie `True` si les deux droites sont perpendiculaires, et `False` sinon.

Exercice VI.30

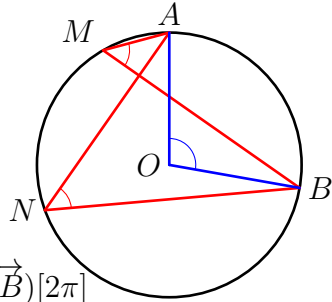
Écrire une fonction Python, qui calcule la norme d'un vecteur $\vec{AB}$ dans un repère orthonormé, connaissant les coordonnées des points A et B .

Séquence VI – Applications du produit scalaire

Géométrie du triangle, théorème d'Al-Kashi et loi des sinus

Exercice VI.31 : théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre

Si les points M, N, A et B sont quatre points deux à deux distincts d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O , alors :



$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) [2\pi]$$

1. En se plaçant dans le triangle OMA , montrer que $2(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OA}) = \pi [2\pi]$
2. Raisonner de même dans le triangle OBM .
3. En utilisant les deux questions précédentes, transformer $2(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$ pour obtenir le résultat demandé.
4. Que peut-on dire des deux angles $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{NA}; \overrightarrow{NB})$?

Exercice VI.32 : applications du théorème d'Al-Kashi

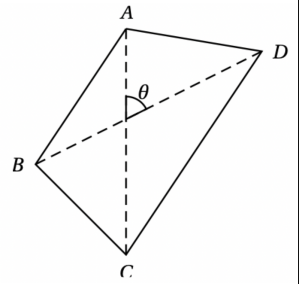
1. ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 2$ et $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$. Déterminer BC .
2. ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $BC = 2$ et $\hat{B} = \frac{3\pi}{4}$. Déterminer AC .
3. ABC est un triangle tel que $BC = 5$, $AC = 3$ et $\hat{C} = 15^\circ$. Déterminer AB .

Exercice VI.33 : applications de la loi des sinus

1. ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $\hat{A} = 60^\circ$ et $\hat{B} = 35^\circ$. Déterminer AC et BC .
2. ABC est un triangle tel que $BC = 3$, $\hat{C} = 30^\circ$ et $\hat{B} = 100^\circ$. Déterminer AB et AC .
3. ABC est un triangle tel que $BC = 5$, $\hat{A} = 40^\circ$ et $\hat{C} = 50^\circ$. Déterminer AB et AC .
4. ABC est un triangle tel que $BC = 5$, $AC = 3$ et $\hat{C} = 15^\circ$. Déterminer l'aire de ABC .

Exercice VI.34

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que sur la figure ci-contre. Soit I le point d'intersection des deux diagonales. On note θ l'angle $\widehat{AID}$



Démontrer que l'aire S du quadrilatère $ABCD$ est

$$S = \frac{1}{2} \times AC \times BD \sin(\theta)$$

Exercice VI.35

On considère un triangle ABC tel que $AC = 3$, $AB = 6$ et $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$.

1. Déterminer la valeur exacte de BC .
2. En déduire une valeur approchée à 10^{-1} près de la mesure de l'angle $\hat{B}$.

Exercice VI.36

Une plaque d'aluminium triangulaire a une épaisseur de 7 mm. Ses côtés mesurent 9 cm, 15 cm et 21 cm.

Déterminer la masse de cette plaque sachant que la masse volumique de l'aluminium est $2,7 \text{ g/cm}^3$.

Exercice VI.37

Un avion A est repéré à la verticale d'une ville faisant route au Nord à la vitesse de 800 km/h. Au même instant, un avion B est repéré à 300 km au nord de A et suivant une route « Sud 60° Ouest » à une vitesse de 600 km/h et à la même altitude.

1. Représenter graphiquement la situation.
2. Calculer la distance qui sépare les deux avions dix minutes plus tard.
3. Calculer le laps de temps qui s'écoulera à compter du repérage jusqu'au moment où la distance séparant les deux appareils sera minimale.
Conseil : choisir 100 km comme unité de distance et l'heure comme unité de temps.

Séquence VI – Applications du produit scalaire

théorèmes de la médiane

Exercice VI.38 : deuxième théorème de la médiane

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$.

En s'inspirant de la preuve du premier théorème de la médiane, démontrer que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{1}{4}BC^2$$

Exercice VI.39 : troisième théorème de la médiane

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$.

On note H le projeté orthogonal de A sur (BC) .
Démontrer que

$$|AB^2 - AC^2| = 2BC \times IH$$

Exercice VI.40 : application des théorèmes de la médiane

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$. On note I le milieu de $[BC]$.
Déterminer AI et BC .

Exercice VI.41

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4$.
 (d) désigne une droite ne passant ni par A ni par B .
 M est un point de la droite (d) .
Déterminer la position du point M de sorte que $MA^2 + MB^2$ soit minimale.

Exercice VI.42 : Identité du parallélogramme

Le but de cet exercice est de démontrer que :

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors la somme des carrés des longueurs de ses côtés est égale à la somme des carrés des longueurs de ses diagonales.

1. Traduire cette propriété sous forme d'une égalité.
2. Afin d'utiliser le théorème de la médiane, introduire le point O , milieu des diagonales du parallélogramme.
3. Utiliser deux fois le théorème de la médiane, puis transformer l'égalité obtenue pour prouver le résultat attendu.

Cette propriété est appelée *l'identité du parallélogramme*.

Exercice VI.43 : autre preuve du premier théorème de la médiane

On peut démontrer le premier théorème de la médiane plus rapidement, mais de manière non heuristique, en décomposant les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ à l'aide du point I dans la somme : $MA^2 + MB^2$. Effectuer cette démonstration.

Exercice VI.44

Démontrer la propriété suivante :

« La somme des carrés des longueurs des médianes d'un triangle est égale aux trois quarts de la somme des carrés des longueurs des côtés. »

Séquence VI – Applications du produit scalaire

Trigonométrie

Exercice VI.45

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ puis préciser les solutions contenues dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

- $\cos 3x = \sin x$
- $\sin(2x) = \cos x$ (on procédera de deux manières différentes)
- $2 \cos^2 x - 1 = \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$

Exercice VI.46

Montrer que, pour tout réel a ,

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

Exercice VI.47

Montrer que, pour tous réels a et b ,

$$\sin(a+b) \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

Exercice VI.48

En utilisant les formules d'addition, calculer la valeur exacte de $\sin \frac{7\pi}{12}$ et $\cos \frac{7\pi}{12}$.

On pourra utiliser l'égalité $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$.

Exercice VI.49

Montrer que, pour tout réel x ,

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$$

Exercice VI.50

Montrer que, pour tout réel x différent de $k\frac{\pi}{2}$, où $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$

Exercice VI.51

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $2 \sin^3 x - 17 \sin^2 x + 7 \sin x + 8 = 0$
- $2 \sin^3 x + \cos^2 x - 5 \sin x - 3 = 0$

Exercice VI.52

Dans cet exercice, on donne : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_{\tan}$,

$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$

En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{9\pi}{8}\right)$.

2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_{\tan}$,
 $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ puis de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
3. Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.

Exercice VI.53

Dans cet exercice, on donne : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

1. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

2. En déduire que $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$.

Exercice VI.54

Dans cet exercice, on donne : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$

Exercice VI.55

Résoudre les inéquations suivantes dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$:

$$\bullet \cos x \leq \frac{1}{2} \quad \bullet \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$$

Exercice VI.56

Montrer que

ABC est un triangle rectangle en A

si et seulement si

$$\sin^2(\hat{A}) = \sin^2(\hat{B}) + \sin^2(\hat{C})$$

Séquence VI – Applications du produit scalaire

Exercices supplémentaires

Exercice VI.57

On considère un triangle ABC . On va démontrer que ABC est rectangle en B si et seulement si $[AC]$ est un diamètre du cercle.

- On raisonne par équivalences successives.
- Dire que ABC est rectangle en B équivaut à dire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.
- On utilise la relation de Chasles et on remplace chaque vecteur qui apparaît dans le produit scalaire précédent par une somme de vecteurs bien choisis (on pourra utiliser le point O , milieu de $[AC]$).
- On utilise les propriétés du produit scalaire pour aboutir à une relation permettant de conclure.

Exercice VI.58

ABC est un triangle non rectangle.

1. Démontrer que

$$\tan(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{\tan \hat{A} + \tan \hat{B}}{1 - \tan \hat{A} \times \tan \hat{B}}$$

2. Démontrer que $\tan(\hat{A} + \hat{B}) = -\tan \hat{C}$.
3. En déduire la relation :

$$\tan \hat{A} + \tan \hat{B} + \tan \hat{C} = \tan \hat{A} \times \tan \hat{B} \times \tan \hat{C}$$

Exercice VI.59

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(x)(1 + \cos x)$$

1. Montrer que la fonction f est 2π -périodique. En déduire qu'on peut restreindre l'étude de la fonction à l'intervalle $] -\pi; \pi]$
2. Étudier la parité de la fonction f . En déduire qu'on peut restreindre l'étude de la fonction à l'intervalle $I = [0; \pi]$.
3. Montrer que la fonction f est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = 2 \left(\cos(x) - \frac{1}{2} \right) (\cos(x) + 1)$$

4. Étudier les variations de la fonction f sur I puis dresser son tableau de variation.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur l'intervalle $] -2\pi; 2\pi]$.

Exercice VI.60

Cercles d'Apollonius A et B sont deux points tels que $AB = 6$ cm. Montrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 40$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice VI.61

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soient les points $A(-1; -3)$ et $B(5; 0)$.

1. Déterminer analytiquement et caractériser l'ensemble (C) des points $M(x; y)$ du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
2. Retrouver ce résultat en introduisant le milieu Ω du segment $[AB]$ dans la relation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
3. Retrouver enfin ce résultat par un raisonnement purement géométrique.

Exercice VI.62

Démontrer que, pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$,

$$\tan(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$$

En déduire les valeurs exactes de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

